Bootcamp Intensif – Calcul I

Préparation à l'examen mi-session

Vachon Victor

Table des matières

---

1 À qui s'adresse ce bootcamp ?

Ce bootcamp a été conçu pour les étudiants de premier cycle universitaire qui débutent en **Calcul différentiel (Calculus I)** et en **Algèbre linéaire** – des cours fondamentaux suivis par de nombreux étudiants en *mathématiques*, *physique*, *informatique*, *génie* et autres disciplines scientifiques. Ces cours, bien que très abordables sur le plan conceptuel, sont souvent vécus comme difficiles. Non pas à cause de la matière elle-même, mais à cause du **choc de l'entrée à l'université** : nouvelles méthodes de travail, charge de cours importante, autonomie soudaine... Résultat : beaucoup d'étudiants comprennent les concepts, mais échouent aux examens. Et souvent, le problème est simple : **manque de pratique indépendante**, sans correction immédiate, sans filet.
Ce **bootcamp** n'est **pas** un cours de théorie. Il n'a pas vocation à remplacer les excellents manuels existants. Il est là pour **entraîner**, comme un programme intensif de révision avant un *midterm* ou un *final*. Chaque PDF est conçu pour représenter **deux jours complets** de travail intensif – idéalement un week-end – avec :

— un rappel **concis** de ce qu'il faut **vraiment connaître** pour réussir l'examen ;

— les **formules essentielles** à maîtriser ;

— et surtout, des **exercices ciblés**, tirés ou inspirés d'anciens examens d'universités variées, pour s'exercer à fond sur chaque notion.

Les présentes notes sont basées sur ***Linear Algebra and its Applications*** de David Lay pour l'algèbre linéaire, et sur ***Calculus : Early Transcendentals (8e édition)*** de James Stewart pour Calculus I. Si vous rencontrez des passages conceptuels qui vous bloquent, je vous recommande vivement de vous référer à ces ouvrages pour approfondir votre compréhension. De plus, la préparation à l'examen final n'est pas un récapitulatif complet du cours. Pour couvrir l'ensemble de la matière, il est essentiel de faire également la préparation à l'examen de mi-session.

Bonne préparation, bon courage… et bonne chance !

2 Suites

Une **suite** est une liste ordonnée de nombres réels. On note généralement une suite à l'aide de la notation a_n, où n est un entier naturel représentant le rang du terme dans la suite.
Par exemple, considérons la suite définie par :

$$a_n = \frac{2}{3+n}$$

Les premiers termes sont :

$$a_1 = \frac{2}{4}, \quad a_2 = \frac{2}{5}, \quad a_3 = \frac{2}{6}, \quad a_4 = \frac{2}{7}, \ldots$$

2.1 Convergence d'une suite

Pour déterminer si une suite converge ou diverge, on étudie la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

- Si cette limite existe et est finie, alors la suite **converge**.
- Si la limite n'existe pas ou est infinie, la suite **diverge**.

Exemple

Déterminons la limite de la suite $a_n = \dfrac{2}{3+n}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+n} = 0$$

Le numérateur reste constant tandis que le dénominateur tend vers l'infini. Donc, la suite converge vers 0.

Exemple

Considérons la suite $a_n = \dfrac{2n^2}{3+n^2}$. Évaluons sa limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{3+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{3}{n^2}+1} = \frac{2}{0+1} = 2$$

La suite converge donc vers 2.

Exercices

1. Déterminez si la suite $a_n = \dfrac{3n^4+4n^2}{1+2n^4}$ converge ou diverge.

2. Déterminez si la suite $a_n = \dfrac{3n^4 + 4n^2}{n + 3n^2 + n^3}$ converge ou diverge.

3. Déterminez si la suite $a_n = \dfrac{\ln n}{\ln(3n)}$ converge ou diverge.

4. Déterminez si la suite $a_n = \dfrac{\sqrt{n} + 4}{\sqrt{n} + n}$ converge ou diverge.

5. Déterminez si la suite $a_n = n - \sqrt{n+2}\sqrt{n+4}$ converge ou diverge.

6. Déterminez si la suite $a_n = n + \sqrt{n+1}\sqrt{n+3}$ converge ou diverge.

2.2 Suites géométriques

Une suite de la forme $a_n = r^n$ converge si et seulement si $-1 < r \leq 1$:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \text{diverge} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple

Considérons la suite $a_n = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - 0 = 1$$

Donc, la suite converge vers 1.

Exercices

7. Déterminez si la suite $a_n = \dfrac{3^{n+1}}{4^n}$ converge ou diverge.

8. Déterminez si la suite $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ converge ou diverge.

2.3 Règle de l'Hôpital (à utiliser avec prudence)

Lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ présente une **forme indéterminée**, on peut parfois utiliser la **règle de l'Hôpital**, en considérant a_n comme les valeurs d'une fonction continue $f(x)$ pour $x = n$.

Cette règle s'applique uniquement lorsque la limite conduit à une forme du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, et à condition que le numérateur et le dénominateur soient **dérivables**.

Attention : cette règle est rigoureusement réservée aux fonctions continues et dérivables sur un intervalle autour de la valeur limite considérée. Son utilisation doit rester exceptionnelle dans le contexte des suites, car on travaille ici avec des entiers.

Exemple

Étudions la suite $a_n = \frac{e^{2n}}{2n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}}{2n}$$

On observe une forme $\frac{\infty}{\infty}$, donc on peut envisager l'utilisation de la règle de l'Hôpital, en considérant la fonction $f(x) = \frac{e^{2x}}{2x}$.

Appliquons la règle :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{2x} \xrightarrow{\text{Hôpital}} \lim_{x\to\infty} \frac{(e^{2x})'}{(2x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{2} = \lim_{x\to\infty} e^{2x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}}{2n} = \infty$$

Le numérateur croît exponentiellement plus vite que le dénominateur de façon linéaire, donc la suite diverge vers l'infini.

Exercices

9. Déterminez si la suite $a_n = \frac{(\ln n)^2}{n}$ converge ou diverge.

2.4 Théorème : Valeur absolue et convergence

Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemple

Considérons la suite $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

La suite converge vers 0.

Exercices

10. Déterminez si la suite $a_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge ou diverge.

2.5 Théorème du Sandwich (ou théorème des gendarmes)

Soient trois suites a_n, b_n, et c_n telles que :

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = L$$

Exercices

11. Déterminez si la suite $a_n = \dfrac{\cos(\pi n)}{1+\sqrt{n}}$ converge ou diverge.

12. Déterminez si la suite $a_n = \dfrac{5^n}{n!}$ converge ou diverge.

13. Déterminez si la suite $a_n = 2^{-n}\cos^2(kn)$ converge ou diverge.

3 Séries

Une **série** est la somme des termes d'une suite. On la note :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

où (a_n) est une suite réelle ou complexe. Déterminer si une série converge ou diverge est une question centrale en analyse.

3.1 Critère de divergence

Un premier test simple pour détecter la divergence est le suivant :

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0, \text{ alors } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

Exemple

Déterminons si la série suivante converge ou diverge :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2^{1+3n}}.$$

On pose $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$. Alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(2^{1+3n}\right)^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(2^1 \cdot 2^{3n}\right)^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} \cdot 2^3 = 1 \cdot 8 = 8 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc, la série diverge par le critère précédent.

Exercices

14. Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$ converge ou diverge.

15. Déterminez si la série

$$\sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}} + \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} + \cdots$$

converge ou diverge.

16. Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$ converge ou diverge.

17. Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$ converge ou diverge.

3.2 Attention : Un piège courant

Il est important de noter que :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{n'implique pas que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Par exemple :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

mais :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge, tandis que } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

3.3 Séries géométriques

Une série géométrique est de la forme :

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1},$$

où r est appelé la *raison*.

— Si $|r| < 1$, la série **converge** et sa somme est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

— Si $|r| \geq 1$, la série **diverge**.

Exercices

18. Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$ converge. Si oui, donnez sa somme.

19. Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{3n}}{5^{n-1}}$ converge. Si oui, donnez sa somme.

20. Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$ converge. Si oui, donnez sa somme.

21. Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$ converge. Si oui, donnez sa somme.

22. Déterminez si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}\left[\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]^n}{3^{2n}}$$

converge. Si oui, donnez sa somme.

3.4 Séries télescopiques

Une **série télescopique** est une série où les termes s'annulent partiellement entre eux, ce qui permet de simplifier fortement la somme. Cela permet parfois de déterminer la convergence et même de calculer la somme exacte.

Exercices

23. Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ converge. Si oui, donnez sa somme.

24. Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ converge. Si oui, donnez sa somme.

25. Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ converge. Si oui, donnez sa somme.

26. Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$ converge. Si oui, donnez sa somme.

27. Déterminez si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)-\cos\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]$$

converge. Si oui, donnez sa somme.

3.5 Le test de l'intégrale

Le test de l'intégrale stipule que si $f(x)$ est une fonction positive, décroissante et continue sur l'intervalle $[1,\infty)$, et si $a_n = f(n)$, alors :

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge } \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$
$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ diverge } \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

Exemple

Il est mentionné que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge. Puisque $\frac{1}{x^2}$ est positive, décroissante et continue sur $[1,\infty)$, on peut appliquer le test de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_1^{n}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{1}\right) = 1\\ &\implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ converge}\end{aligned}$$

Exercices

28. Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ converge ou diverge.

29. Déterminez si la série $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}$ converge ou diverge.

30. Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/2}}{n^2}$ converge ou diverge.

31. Déterminez si la série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{r^2}{e^2}$ converge ou diverge.

3.6 Séries de Riemann et test de comparaison

Le test de l'intégrale permet de déterminer la convergence des séries de la forme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \text{converge si } p > 1 \\ \text{diverge si } p \leq 1 \end{cases}$$

Une telle série est appelée **série de Riemann**.

Nous pouvons utiliser les séries de Riemann et les séries géométriques pour déterminer si d'autres séries convergent en utilisant le test de comparaison :

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge et } 0 \leq a_n \leq b_n \text{ pour tout } n, \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$
$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge et } a_n \geq b_n \text{ pour tout } n, \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

Exercices

32. Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-\cos^2(n)}$ converge ou diverge.

33. Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n+3}$ converge ou diverge.

34. Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin^2(n)}{1+n^3}$ converge ou diverge.

35. Déterminez si la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ converge ou diverge.

3.7 Test de comparaison limite

Lorsque le test de comparaison classique ne s'applique pas, on peut utiliser la **forme limite du test de comparaison**.

Soient deux séries à termes positifs $\sum a_n$ et $\sum b_n$:

$$\frac{a_n}{b_n} \to c \text{ avec } c > 0 \text{ et } c \neq \infty \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \sum a_n \text{ converge si et seulement si } \sum b_n \text{ converge} \\ \sum a_n \text{ diverge si et seulement si } \sum b_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Exercices

36. Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$ converge ou diverge.

37. Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5n}{n^3+n+1}$ converge ou diverge.

38. Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$ converge ou diverge.

39. Déterminez si la série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3}$ converge ou diverge.

40. Pour quelles valeurs de p la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2+n^3}$ converge-t-elle ?

3.8 Séries alternées

Une série est dite **alternée** si ses termes changent de signe de manière régulière, généralement à travers un facteur multiplicatif de la forme $(-1)^n$, $(-1)^{n+1}$ ou $(-1)^{n-1}$.
Par exemple :

— Si la série contient $(-1)^n$, le premier terme est négatif ;

— Si elle contient $(-1)^{n+1}$ ou $(-1)^{n-1}$, le premier terme est positif.

Considérons une série alternée de la forme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 + \dots \quad \text{avec } b_n > 0.$$

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} b_{n+1} \leq b_n \quad \text{(suite décroissante)} \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Exercices

41. Déterminez si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$$

converge ou diverge.

42. Déterminez si la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(\sqrt{n})^3}$$

converge ou diverge.

43. Déterminez si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

converge ou diverge.

44. Pour quelles valeurs de p la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$$

converge-t-elle ?

45. Pour quelles valeurs de p la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+5}}$$

converge-t-elle ?

3.9 Convergence absolue et test du rapport

Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est dite **absolument convergente** si la série des valeurs absolues $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Théorème : Toute série absolument convergente est convergente.

Pour tester la convergence absolue d'une série, on peut utiliser le test du rapport :

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

$$\text{Si} \begin{cases} L < 1 & \Rightarrow \text{ la série est absolument convergente, donc convergente.} \\ L > 1 \text{ ou } L = \infty & \Rightarrow \text{ la série diverge.} \\ L = 1 & \Rightarrow \text{ le test est inconclusif.} \end{cases}$$

Exercices

46. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n}.$$

47. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!}.$$

48. Étudier la convergence de la série
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2n+7}.$$

49. Étudier la convergence de la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)!}{(3n)!}.$$

3.10 Test de la racine

Lorsque les termes d'une série comportent des puissances de n (comme n^n, a^n, etc.), il est pertinent d'utiliser le test de la racine.

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

$$\text{Si} \begin{cases} L < 1 & \Rightarrow \text{ la série est absolument convergente.} \\ L > 1 \text{ ou } L = \infty & \Rightarrow \text{ la série diverge.} \\ L = 1 & \Rightarrow \text{ le test est inconclusif.} \end{cases}$$

Exercices

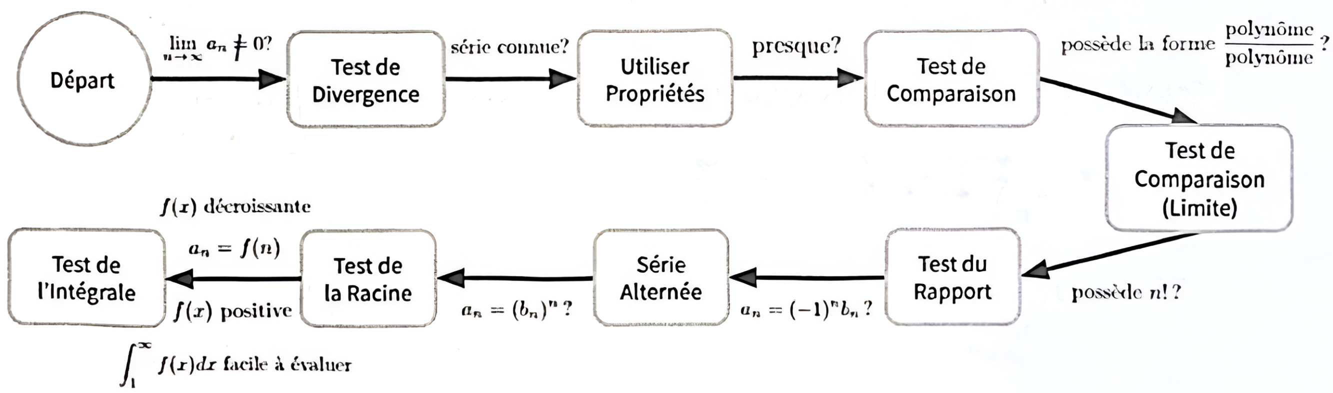
50. Déterminer si la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+2n}}$$
converge absolument, converge ou diverge.

51. Déterminer si la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$$
converge absolument, converge ou diverge.

52. Déterminer si la série
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n$$
converge absolument, converge ou diverge.

3.11 Stratégie générale

Voici le trajet à suivre :



4 Développements en séries

4.1 Séries entières et rayon de convergence

Une **série entière** est une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

Elle est dite *centrée en* a, où x est une variable, et c_n, a sont des constantes.
Étant donné une série entière et son rayon de convergence R, trois cas sont possibles :

$$\begin{cases} 1. & \text{La série converge seulement lorsque } x = a \quad (R = 0). \\ 2. & \text{La série converge pour tout } x \in \mathbb{R} \quad (R = \infty). \\ 3. & \text{La série converge si } |x-a| < R, \text{ et diverge si } |x-a| > R. \end{cases}$$

Le **test du rapport** est habituellement utilisé pour déterminer le rayon de convergence R.

Exercices

53. Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(4x-8)^n.$$

54. Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(2x+1)^n.$$

55. Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n^n}.$$

56. Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2x^n}{2^n}.$$

Séries entières et fonctions :

Exercices

57. Trouvez une représentation en série entière de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{5-x}$$

et déterminez son rayon de convergence.

58. Trouvez une représentation en série entière de la fonction

$$f(x) = \frac{5}{1-4x^2}$$

et déterminez son rayon de convergence.

59. Trouvez une représentation en série entière de la fonction

$$f(x) = \ln(5-x)$$

et déterminez son rayon de convergence.

60. Trouvez une représentation en série entière de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x+10}$$

et déterminez son rayon de convergence.

61. Trouvez une représentation en série entière de la fonction

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

et déterminez son rayon de convergence.

4.2 Séries de Taylor et de Maclaurin

La **série de Taylor** d'une fonction $f(x)$ centrée en $x = a$ est donnée par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Lorsque la série est centrée en $a = 0$, on parle de **série de Maclaurin** :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Quelques séries de Maclaurin classiques à connaître :

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, && \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, && \text{converge pour tout } x \in \mathbb{R} \\
\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, && \text{converge pour tout } x \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, && |x| < 1 \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, && |x| < 1 \\
\tan^{-1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, && |x| \leq 1
\end{aligned}$$

Remarques importantes :

- Toutes les fonctions ne sont pas développables en séries de Taylor partout : il faut que f soit infiniment dérivable au point considéré et que la série converge vers $f(x)$.
- Ces séries sont très utiles pour les approximations (développement limité), la résolution d'équations différentielles et l'analyse asymptotique.

Exercices

62. Déterminez la série de Taylor pour $f(x) = e^{-x}$ centrée en $x = 0$.

63. Déterminez la série de Taylor pour $f(x) = \cos(x)$ centrée en $x = \pi$ et trouvez son rayon de convergence.

64. Déterminez la série de Taylor pour $f(x) = \sin(x)$ centrée en $x = \frac{\pi}{2}$ et trouvez son rayon de convergence.

5 Limites, continuité, droites et plan

5.1 Domaine de définition

Le **domaine de définition** d'une fonction de plusieurs variables, par exemple $z = f(x, y)$, est l'ensemble des couples (x, y) pour lesquels l'expression de $f(x, y)$ donne une valeur réelle.
Une fonction de plusieurs variables n'est pas définie dans les cas suivants :

1. Division par zéro.

2. Racine carrée d'un nombre négatif (dans $\mathbb{R}$).

3. Logarithme d'un nombre négatif ou nul.

Exercices

65. Déterminez le domaine de définition de la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{2x + y}.$$

66. Déterminez le domaine de définition de la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

67. Déterminez le domaine de définition de la fonction

$$f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2).$$

68. Déterminez le domaine de définition de la fonction

$$f(x, y) = \frac{\sqrt[x]{y - x^2}}{1 - x^2}.$$

69. Déterminez le domaine de définition de la fonction

$$f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2).$$

5.2 Courbes de niveau

Les **courbes de niveau** d'une fonction $z = f(x, y)$ sont les courbes tracées dans le plan (x, y), obtenues en fixant la valeur de la fonction à une constante donnée :

$$f(x, y) = k$$

Chaque valeur de k donne une courbe de niveau différente.

Exercices

70. Déterminez les courbes de niveau correspondant à $k = 4$ pour la fonction :

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

71. Déterminez les courbes de niveau correspondant à $k = 0$ pour la fonction :

$$f(x, y) = \frac{y^4 \sin(x)}{x^2 + y^4}$$

72. Déterminez les courbes de niveau correspondant à $k = 0$ pour la fonction :

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

5.3 Limites

Pour démontrer que la limite d'une fonction de deux variables $f(x, y)$ n'existe pas en un point, il suffit de montrer que la limite dépend du chemin suivi pour s'approcher de ce point et démontrer que nous obtenons deux résultats différents.

Exercices

73. Déterminez la limite suivante ou démontrez qu'elle n'existe pas :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$$

74. Déterminez la limite suivante ou démontrez qu'elle n'existe pas :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5y^4 \cos^2(x)}{x^4 + y^4}$$

75. Déterminez la limite suivante ou démontrez qu'elle n'existe pas :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

76. Déterminez la limite suivante ou démontrez qu'elle n'existe pas :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

77. Déterminez la limite suivante ou démontrez qu'elle n'existe pas :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin^2(y)}{x^2 + 2y^2}$$

5.4 Continuité

Une fonction $f(x, y)$ est continue en $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. Le point $f(a, b)$ existe.

2. La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe.

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$

Exercices

78. Déterminez l'ensemble des points où la fonction suivante est continue :

$$G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$$

79. Déterminez l'ensemble des points où la fonction suivante est continue :

$$f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2} \cdot \ln(z)$$

80. Déterminez l'ensemble des points où la fonction suivante est continue :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

81. Déterminez l'ensemble des points où la fonction suivante est continue :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5.5 Droites

L'équation vectorielle d'une droite dans l'espace est donnée par :

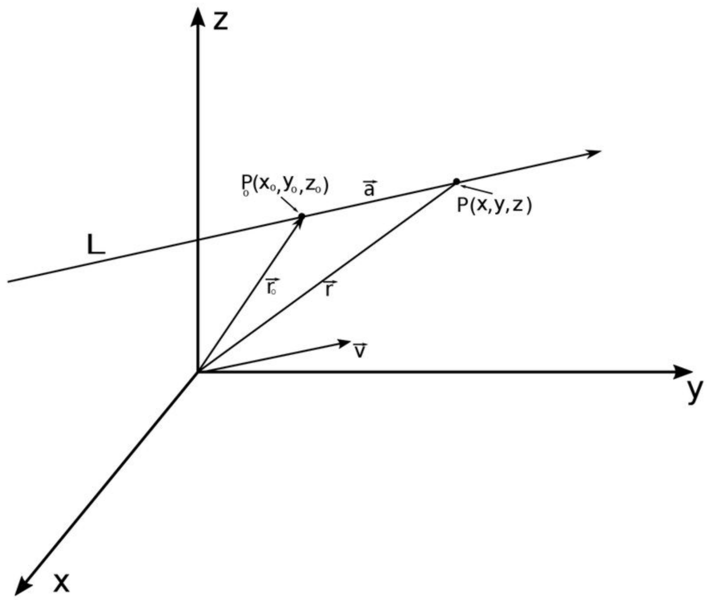
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}$$

où :

$$\boldsymbol{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle \quad \text{est un point de la droite,} \quad \boldsymbol{v} = \langle a, b, c \rangle \quad \text{est un vecteur directeur,} \quad t \in \mathbb{R}$$

Cela conduit aux équations paramétriques de la droite :

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$



Exercices

82. Déterminez les équations paramétriques de la droite passant par le point $(0, 14, -10)$ et parallèle à la droite définie par :

$$x = -1 + 2t, \quad y = 6 - 3t, \quad z = 3 + 9t$$

Indication : Utilisez le vecteur directeur de la droite donnée pour construire les équations paramétriques.

83. Déterminez les équations paramétriques et symétriques de la droite passant par les points :

$$A\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) \quad \text{et} \quad B(2, 1, -3)$$

Indication : Calculez le vecteur directeur $\vec{AB}$ et utilisez-le avec l'un des deux points pour écrire les équations.

84. Déterminez si la droite passant par les points $(-4, -6, 1)$ et $(-2, 0, -3)$ est parallèle à celle passant par les points $\mathcal{C}(10, 18, 4)$ et $\mathcal{O}(5, 3, 14)$. *Indication :* Comparez les vecteurs directeurs obtenus pour les deux droites.

5.6 Plans

L'équation d'un plan dans l'espace peut s'écrire sous forme vectorielle :

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$$

où :

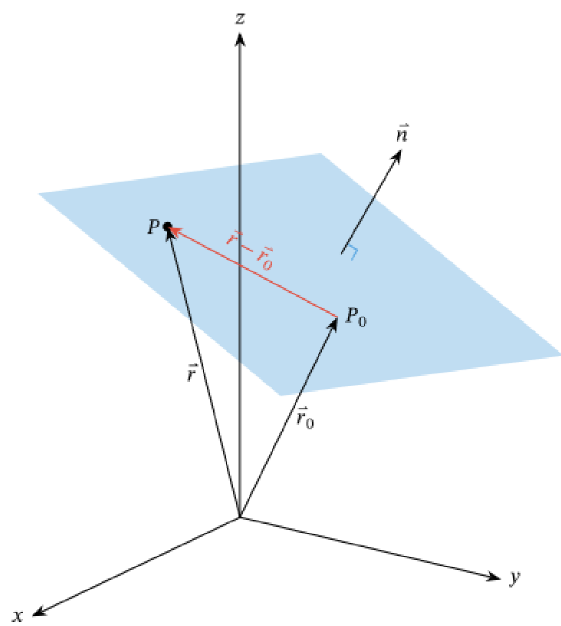
— $\boldsymbol{n} = \langle a, b, c \rangle$ est un vecteur normal au plan,

— $\boldsymbol{r} = \langle x, y, z \rangle$ est un point générique du plan,

— $\boldsymbol{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ est un point appartenant au plan.

Ce qui nous donne l'équation cartésienne du plan :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$



Exercices

85. Déterminez l'équation du plan contenant le point $(2, 0, 1)$ et perpendiculaire à la droite définie par :

$$x = 3t, \quad y = 2 - t, \quad z = 3 + 4t$$

Indication : Le vecteur directeur de la droite est normal au plan recherché.

86. Déterminez l'équation du plan contenant les points $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$.

87. Déterminez l'équation du plan contenant les points $(3, -1, 2)$, $(8, 2, 4)$ et $(-1, -2, -3)$.

88. Déterminez le point d'intersection entre le plan

$$x - y + 2z = 9$$

et la droite paramétrée par :

$$x = 3 - t, \quad y = 2 + t, \quad z = 5t.$$

89. Déterminez le point d'intersection entre le plan

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

et la droite paramétrée par :

$$x = 1 + 4t, \quad z = 2 - 3t.$$

90. Déterminez l'angle entre les deux plans suivants :

$$x + y + z = 1 \quad \text{et} \quad x - y + z = 1.$$

91. Déterminez l'angle entre les plans :

$$x + 2y + 2z = 1 \quad \text{et} \quad 2x - y + 2z = 1.$$

92. Déterminez l'angle entre les plans :

$$x = 4y - 2z \quad \text{et} \quad 8y = 1 + 2x + 4z.$$

5.7 Formule de la distance d'un point à un plan

La distance D entre un point (x, y, z) et un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule :

$$D = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exercices

93. Déterminez la distance entre le point $(-6, 3, 5)$ et le plan :

$$x - 2y - 4z = 8.$$

94. Déterminez la distance entre les plans :

$$6z = 4y - 2x \quad \text{et} \quad 9z = 1 - 3x + 6y.$$

95. Déterminez la distance entre les plans :

$$2x - 3y + z = 4 \quad \text{et} \quad 4x - 6y + 2z = 3.$$

96. Déterminez la distance entre les droites gauches :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 6t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 5 + 15s \\ z = -2 + 6s \end{cases}$$

97. Déterminez la distance entre les droites gauches :

$$d_1 : \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1},$$
$$d_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$$

6 Dérivées partielles et applications

Une **dérivée partielle** est la dérivée d'une fonction à plusieurs variables, prise par rapport à l'une de ces variables, les autres étant considérées comme des constantes. Par exemple, si nous avons une fonction de plusieurs variables et que nous la dérivons par rapport à x, nous traitons les autres variables comme constantes. Cette dérivée est notée f_x ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Exemple

Soit la fonction suivante :

$$f(x, y, z) = x^3yz + y^2z^2 + 2zx$$

Nous cherchons la dérivée partielle de f par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3yz) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2z^2) + \frac{\partial}{\partial x}(2zx)$$

Comme y^2z^2 ne dépend pas de x, sa dérivée partielle est nulle. Pour les autres termes :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3yz) = 3x^2yz, \quad \frac{\partial}{\partial x}(2zx) = 2z$$

Ainsi, on obtient :

$$f_x = 3x^2yz + 2z$$

Exercices

98. Trouvez les dérivées partielles de

$$f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$$

99. Trouvez les dérivées partielles de

$$w = z \cdot e^{xyz}$$

100. Trouvez les dérivées partielles de

$$u = \ln(x + 2y + 3z)$$

101. Trouvez f_{xxx} et f_{xyz} pour la fonction

$$f(x, y) = x^4y^2 - x^3y$$

6.1 Théorème de Clairaut (ou des dérivées croisées)

Le **théorème de Clairaut** affirme que, si les dérivées croisées sont continues, alors l'ordre dans lequel on effectue les dérivations partielles n'a pas d'importance. Ainsi, pour une fonction suffisamment régulière :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Exemple

Soit la fonction :

$$f(x, y, z) = \cos(2y + zx)$$

Nous voulons calculer la dérivée partielle f_{yyz}. Commençons par dériver successivement :

$$f_y = -2\sin(2y + zx), \quad f_z = -x\sin(2y + zx)$$

$$f_{yy} = -4\cos(2y + zx), \quad f_{yz} = -2x\cos(2y + zx), \quad f_{zy} = -2x\cos(2y + zx)$$

Puis :

$$f_{yyz} = \frac{\partial}{\partial z}(-4\cos(2y + zx)) = 4x\sin(2y + zx)$$

On vérifie que :

$$f_{yyz} = f_{yzy} = f_{zyy} = 4x\sin(2y + zx)$$

Exercices

102. Vérifiez que les dérivées croisées sont égales :

$$u_{xy} = u_{yx}, \quad \text{où } u = e^{xy}\sin(y)$$

6.2 Plans tangents

Si f possède des dérivées partielles continues, alors le plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $P(x_0, y_0, z_0)$ est donné par :

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Exemple

Analysons le plan tangent à la surface $z = x^2 + xy + 3y^2$ au point $P(1, 1, 5)$.
Les dérivées partielles sont :

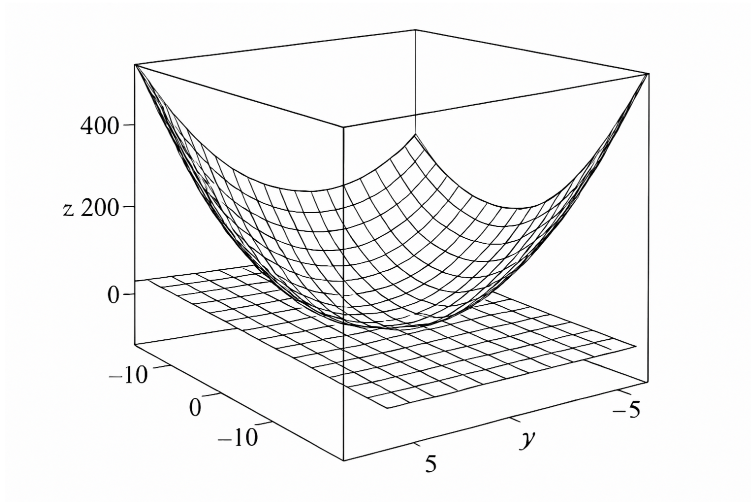
$$f_x = 2x + y, \quad f_y = x + 6y$$

Évaluées au point $(1, 1)$:

$$f_x(1, 1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \quad f_y(1, 1) = 1 + 6 \cdot 1 = 7$$

D'où l'équation du plan tangent :

$$z - 5 = 3(x - 1) + 7(y - 1) \quad \Longrightarrow \quad z = 3x + 7y - 5$$



Nous pouvons voir graphiquement que ce plan est tangent à la surface $z = x^2 + xy + 3y^2$;

Exercices

103. Trouver l'équation du plan tangent à la surface $z = \ln(2x + y)$ au point $P(-1, 3)$.

104. Trouver l'équation du plan tangent à la surface $z = x \sin(x + y)$ au point $P(-1, 1)$.

6.3 Linéarisation

Si les dérivées partielles f_x et f_y existent dans un voisinage de $P(a, b)$ et sont continues en ce point, alors f est différentiable en $P(a, b)$.
Dans ce cas, la fonction $f(x, y)$ peut être approchée près de (a, b) par une fonction affine $L(x, y)$ correspondant au plan tangent :

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Ainsi, l'approximation locale de f s'écrit :

$$L(x, y) \approx f(x, y)$$

Exercices

105. La fonction $f(x, y) = x^3y^4$ est-elle différentiable au point $P(1, 1)$? Si oui, déterminer $L(1, 1)$.

106. La fonction $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$ est-elle différentiable au point $P(2, -2)$? Si oui, déterminer $L(2, -2)$.

107. La fonction $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}$ est-elle différentiable au point $P(3, 0)$? Si oui, déterminer $L(3, 0)$.

108. La fonction $f(x, y) = e^{-xy}\cos(y)$ est-elle différentiable au point $P(\pi, 0)$? Si oui, déterminer $L(\pi, 0)$.

6.4 Dérivation en chaîne

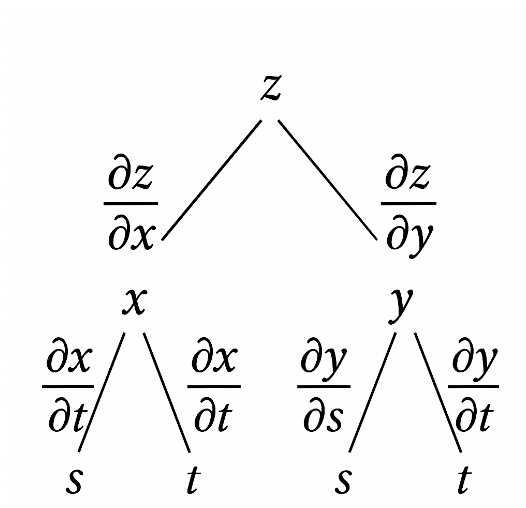
Supposons que nous ayons une fonction différentiable $z = f(x, y)$, où les variables x et y dépendent elles-mêmes de deux autres variables s et t selon les relations suivantes :

$$x = g(s, t), \quad y = h(s, t).$$

Alors, les dérivées partielles de z par rapport à s et à t sont données par la règle de la dérivation en chaîne :

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Pour mieux comprendre cette méthode, il est utile de représenter les relations sous forme d'un **arbre de dépendance**. Chaque chemin de l'arbre, allant de z jusqu'à une variable indépendante (s ou t), représente une contribution à la dérivée. On somme tous les chemins menant à la variable souhaitée, et chaque chemin correspond au produit des dérivées le long de ce chemin.



Exercices

109. Soient les fonctions :

$$w = xe^{\frac{y}{2}}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = \tan(t).$$

Déterminez $\dfrac{dw}{dt}$.

110. Soient les fonctions :

$$z = e^r\cos(\theta), \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}.$$

Déterminez $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

111. Soient les fonctions :

$$w = xy + yz + zx, \quad x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad z = r\theta.$$

Déterminez $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ lorsque $r = 2$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

6.5 Dérivation implicite

La règle de dérivation en chaîne peut être utilisée pour obtenir la formule suivante, très utile en dérivation implicite :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Exercices

112. Trouvez la dérivée $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ si $y = f(x)$ satisfait l'équation suivante :

$$3y^4 + x^7 = 5x$$

113. Trouver la dérivée $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ si $z = f(x, y)$ satisfait l'équation :

$$x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$$

114. Trouver la dérivée $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ si $z = f(x, y)$ satisfait :

$$x^3z^2 - 5xy^5z = x^2 + y^3$$

115. Trouver la dérivée $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $z = f(x, y)$ satisfait :

$$x^2\sin(2y - 5z) = 1 + y\cos(6zx)$$

116. Soit l'équation :

$$y\cos(x) = x^2 + y^2.$$

Déterminez $\dfrac{dy}{dx}$.

117. Soit l'équation :

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$

Déterminez $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

118. Soit l'équation :

$$yz + x\ln(y) = z^2.$$

Déterminez $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

6.6 Vecteur gradient

Le vecteur gradient est la généralisation de la dérivée aux fonctions de plusieurs variables. Pour une fonction de trois variables, le gradient est défini par :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{k}$$

Le gradient d'une fonction multivariée, évalué en un point donné, indique la direction dans laquelle la fonction croît le plus rapidement. La norme du vecteur gradient, notée $\|\nabla f\|$, représente alors le **taux de variation maximal** de la fonction à ce point.

Exercices

119. Déterminez le taux de variation maximal de la fonction :

$$f(x, y) = 4y\sqrt{x}$$

au point $P(4, 1)$. Quelle est sa direction ?

120. Déterminez le taux de variation maximal de la fonction :

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{z}$$

au point $P(1, 1, -1)$. Quelle est sa direction ?

121. Déterminez le taux de variation maximal de la fonction :

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

au point $P(3, 6, -2)$. Quelle est sa direction ?

122. Déterminez le taux de variation maximal de la fonction :

$$f(p, q, r) = \arctan(p, q, r)$$

au point $P(1, 2, 1)$. Quelle est sa direction ?
Remarque : ici, la notation $\arctan(p, q, r)$ *est ambiguë. Est-ce une erreur typographique ou une fonction scalaire de type* $\arctan\left(\frac{q}{p}\right)$ *? À clarifier.*

6.7 Dérivée directionnelle

La dérivée directionnelle d'une fonction multivariée mesure le taux de variation de la fonction dans une direction donnée. Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire indiquant la direction choisie, alors la dérivée directionnelle de f en ce point est donnée par :

$$f_{\vec{u}}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{u}$$

Exercices

123. Calculez la dérivée directionnelle de la fonction f dans la direction du vecteur $\vec{u} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$.

124. Calculez la dérivée directionnelle de la fonction suivante :

$$g(p, q) = p^4 - p^2 q^3$$

au point $P(2, 1)$ dans la direction de $\vec{u} = 5\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$.

125. Calculez la dérivée directionnelle de la fonction :

$$f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$$

au point $P(0, 0, 0)$ dans la direction du vecteur $\vec{u} = 5\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$.

6.8 Surfaces de niveau

Une **surface de niveau** est l'ensemble des points (x, y, z) qui satisfont une équation de la forme

$$F(x, y, z) = k,$$

où F est une fonction de trois variables réelles, et k est une constante réelle.
La **normale** au plan tangent en un point donné de la surface de niveau est donnée par le **gradient** de F en ce point. Le gradient s'écrit :

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

L'équation du plan tangent à la surface au point $P(x_0, y_0, z_0)$ est alors :

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Cette formule généralise celle utilisée pour le plan tangent à une surface définie par une fonction de deux variables.

Exercices

126. Trouvez les équations de la normale et du plan tangent à la surface

$$2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10$$

au point $P(3,3,5)$.

127. Trouvez les équations de la normale et du plan tangent à la surface

$$y = x^2 - z^2$$

au point $P(4,7,3)$.

128. Trouvez les équations de la normale et du plan tangent à la surface

$$xyz^2 = 6$$

au point $P(3,2,1)$.

129. Trouvez les équations de la normale et du plan tangent à la surface

$$xy + yz + zx = 5$$

au point $P(1,2,1)$.

130. Trouvez les équations de la normale et du plan tangent à la surface

$$x + y + z = e^{xyz}$$

au point $P(0,0,1)$.

131. Trouvez les équations de la normale et du plan tangent à la surface

$$x^4 + y^4 + z^4 = 3x^2y^2z^2$$

au point $P(3,3,5)$.