Bootcamp Intensif – Calcul I
Préparation à l'examen final

Vachon Victor

Table des matières

---

1 À qui s'adresse ce bootcamp ?

Ce bootcamp a été conçu pour les étudiants de premier cycle universitaire qui débutent en **Calcul différentiel (Calculus I)** et en **Algèbre linéaire** – des cours fondamentaux suivis par de nombreux étudiants en *mathématiques*, *physique*, *informatique*, *génie* et autres disciplines scientifiques. Ces cours, bien que très abordables sur le plan conceptuel, sont souvent vécus comme difficiles. Non pas à cause de la matière elle-même, mais à cause du **choc de l'entrée à l'université** : nouvelles méthodes de travail, charge de cours importante, autonomie soudaine... Résultat : beaucoup d'étudiants comprennent les concepts, mais échouent aux examens. Et souvent, le problème est simple : **manque de pratique indépendante**, sans correction immédiate, sans filet.
Ce **bootcamp** n'est **pas** un cours de théorie. Il n'a pas vocation à remplacer les excellents manuels existants. Il est là pour **entraîner**, comme un programme intensif de révision avant un *midterm* ou un *final*. Chaque PDF est conçu pour représenter **deux jours complets** de travail intensif – idéalement un week-end – avec :

- un rappel **concis** de ce qu'il faut **vraiment connaître** pour réussir l'examen ;
- les **formules essentielles** à maîtriser ;
- et surtout, des **exercices ciblés**, tirés ou inspirés d'anciens examens d'universités variées, pour s'exercer à fond sur chaque notion.

Les présentes notes sont basées sur ***Linear Algebra and its Applications*** de David Lay pour l'algèbre linéaire, et sur ***Calculus : Early Transcendentals (8e édition)*** de James Stewart pour Calculus I. Si vous rencontrez des passages conceptuels qui vous bloquent, je vous recommande vivement de vous référer à ces ouvrages pour approfondir votre compréhension. De plus, la préparation à l'examen final n'est pas un récapitulatif complet du cours. Pour couvrir l'ensemble de la matière, il est essentiel de faire également la préparation à l'examen de mi-session.

Bonne préparation, bon courage... et bonne chance !

2 Fonctions de plusieurs variables

2.1 Continuité

Une fonction $f(x, y)$ est continue en $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. Le point $f(a, b)$ existe.
2. La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe.
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$

Exercices

1. Déterminez $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$ ou démontrez qu'elle n'existe pas.

2. Déterminez $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\sin^2 x}{x^4+y^4}$ ou démontrez qu'elle n'existe pas.

3. Déterminez $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5y^4\cos^2(x)}{x^4+y^4}$ ou démontrez qu'elle n'existe pas.

4. Déterminez l'ensemble de points où la fonction suivante est continue :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

5. Déterminez l'ensemble de points où la fonction suivante est continue :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

6. Déterminez $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4\sin\left(\frac{1}{x^2+|y|}\right)$ ou démontrez qu'elle n'existe pas.

7. Déterminez $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2(1-\cos(2x))}{x^4+y^2}$ ou démontrez qu'elle n'existe pas.

8. Déterminez l'ensemble de points où la fonction suivante est continue :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

9. Déterminez l'ensemble de points où la fonction suivante est continue :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

10. Déterminez l'ensemble de points où la fonction suivante est continue :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin^2(y)}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

11. Déterminez l'ensemble de points où la fonction suivante est continue :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

12. Déterminez l'ensemble de points où la fonction suivante est continue :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y+xy^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2.2 Dérivées partielles

Une dérivée partielle est tout simplement la dérivée d'une fonction de plusieurs variables par rapport à une seule variable, les autres étant considérées comme constantes. Par exemple, si nous dérivons une fonction par rapport à x, nous traitons les autres variables comme des constantes. La dérivée est alors notée f_x ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Exemple

Soit la fonction suivante :

$$f(x,y,z) = x^3yz + y^2z^2 + 2zx$$

Nous cherchons la dérivée partielle de f par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3yz) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2z^2) + \frac{\partial}{\partial x}(2zx)$$

Comme y^2z^2 ne dépend pas de x, sa dérivée partielle est nulle. Pour les autres termes :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3yz) = 3x^2yz, \quad \frac{\partial}{\partial x}(2zx) = 2z$$

Ainsi, on obtient :

$$f_x = 3x^2yz + 2z$$

Exercices

13. Trouvez les dérivées partielles de $f(x,y) = x^4y^3 + 8x^2y$.

14. Trouvez les dérivées partielles de $w = z \cdot e^{xyz}$.

15. Trouvez les dérivées partielles de $u = \ln(x+2y+3z)$.

16. Trouvez f_{xxx} et f_{xyx} si $f(x,y) = x^4y^2 - x^3y$.

2.3 Théorème de Clairaut

Le théorème de Clairaut stipule que l'ordre des variables par rapport auxquelles nous dérivons une fonction de plusieurs variables n'a aucune importance (si les dérivées secondes sont continues).

Exemple

Soit la fonction

$$f(x, y, z) = \cos(2y + zx).$$

Supposons que nous voulons calculer f_{yyz}. Nous allons démontrer que $f_{yyz} = f_{yzy} = f_{zyy}$:

$$\begin{aligned} f_y &= -2\sin(2y+zx), \quad f_z = -x\sin(2y+zx), \\ f_{yy} &= -4\cos(2y+zx), \quad f_{yz} = -2x\cos(2y+zx), \quad f_{zy} = -2x\cos(2y+zx), \\ f_{yyz} &= 4x\sin(2y+zx) = f_{yzy} = 4x\sin(2y+zx) = f_{zyy} = 4x\sin(2y+zx). \end{aligned}$$

Exercices

17. Vérifiez que $u_{xy} = u_{yx}$ si $u = e^{xy}\sin(y)$.

3 Dérivées et applications

3.1 Dérivation implicite

La règle de dérivation en chaîne peut être utilisée pour obtenir la formule suivante, très utile en dérivation implicite :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Exercices

18. Soit l'équation $y\cos(x) = x^2 + y^2$. Déterminez $\frac{dy}{dx}$.

19. Soit l'équation $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Déterminez $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

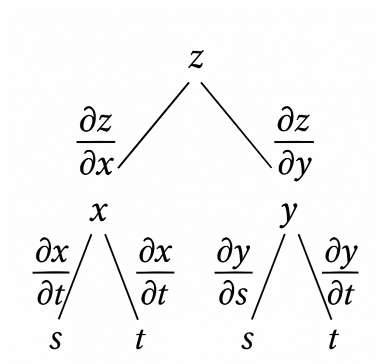
20. Soit l'équation $yz + x\ln y = z^2$. Déterminez $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3.2 Dérivation en chaîne

Supposons que nous avons une fonction $z = f(x, y)$ qui est différentiable, avec $x = g(s, t)$ et $y = h(s, t)$. Nous pouvons calculer les dérivées partielles de z par rapport à s et t de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \end{aligned}$$

Pour se souvenir de cette règle, il est utile de dessiner l'arbre de dépendance :



Pour dériver la racine (z) par rapport à une variable, il suffit d'additionner les chemins de l'arbre où cette variable se trouve comme feuille. Un chemin constitue un produit des valeurs associées aux branches.

Exercices

21. Soient les fonctions $w = xe^{\frac{y}{z}}$, $\quad x = t^2$, $\quad y = 1 - t$, $\quad z = \tan(t)$. Déterminez $\frac{\partial w}{\partial t}$.

22. Soient les fonctions $z = e^r \cos(\theta)$, $\quad r = st$, $\quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$. Déterminez $\frac{\partial z}{\partial s}$ et $\frac{\partial z}{\partial t}$.

23. Soient les fonctions $w = xy + yz + zx$, $\quad x = r\cos(\theta)$, $\quad y = r\sin(\theta)$, $\quad z = r\theta$. Déterminez $\frac{\partial w}{\partial r}$ et $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ lorsque $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

24. Soit $z = f(x, y)$ une fonction exprimée en coordonnées polaires, c'est-à-dire que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Calculez $\frac{\partial z}{\partial r}$ et $\frac{\partial z}{\partial \theta}$. Déduisez ensuite que :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

25. Soit $F(x, y) = x^5y^2 - x^3y^6 + 3xy - 3$.

(a) Supposons que $F(x, y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x. Exprimez $\frac{\partial y}{\partial x}$ en termes de $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$, et calculez sa valeur en $(1, 1)$.

(b) Calculez $\frac{\partial F}{\partial t}$ si $x = s + t$ et $y = st$.

26. Déterminez $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ lorsque z est définie implicitement par $e^z = xyz$. Évaluez chacune des dérivées au point $(x, y, z) = \left(e^{1/2}, 2, \frac{1}{2}\right)$.

27. Soit $z = f(x, y)$ où $x = r^2 + s^2$ et $y = 2rs$. Déterminez $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s}$.

3.3 Plans tangents

Si f possède des dérivées partielles continues, alors l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $P(x_0, y_0, z_0)$ est :

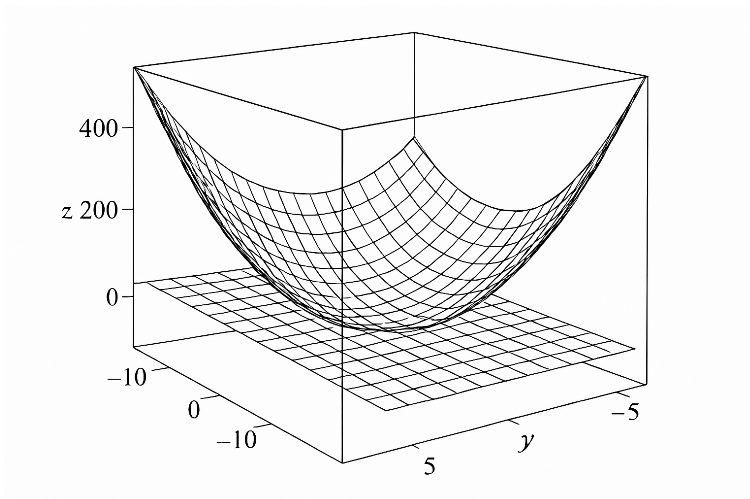
$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Exemple

Analysons le plan tangent à la surface $z = x^2 + xy + 3y^2$ au point $P(1, 1, 5)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + y, & f_y &= x + 6y \\ f_x(1,1) &= 2 \cdot 1 + 1 = 3, & f_y(1,1) &= 1 + 6 \cdot 1 = 7 \\ z - 5 &= 3(x-1) + 7(y-1) & & \\ \Rightarrow z &= 3x + 7y - 5 & & \end{aligned}$$

Nous pouvons voir graphiquement que ce plan est tangent à la surface $z = x^2 + xy + 3y^2$:



Exercices

28. Trouvez l'équation du plan tangent à la surface $z = \ln(2x + y)$ au point $P(-1, 3)$.

29. Trouvez l'équation du plan tangent à la surface $z = x \sin(x + y)$ au point $P(-1, 1)$.

3.4 Vecteur gradient

Le vecteur gradient est la généralisation, à plusieurs variables, de la dérivée d'une fonction d'une seule variable. Pour une fonction de trois variables, le gradient est donné par :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Le gradient d'une fonction de plusieurs variables, à un point donné, est orienté vers la direction du taux de variation maximal. Ce taux de variation est donné par la norme du vecteur gradient, soit $\|\nabla f\|$.

Exercices

30. Déterminez le taux de variation maximal de $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$ au point $P(4, 1)$. Quelle est sa direction ?

31. Déterminez le taux de variation maximal de $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{z}$ au point $P(1, 1, -1)$. Quelle est sa direction ?

32. Déterminez le taux de variation maximal de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ au point $P(3, 6, -2)$. Quelle est sa direction ?

33. Déterminez le taux de variation maximal de $f(p, q, r) = \arctan(p, q, r)$ au point $P(1, 2, 1)$. Quelle est sa direction ?

3.5 Dérivée directionnelle

La dérivée directionnelle est le taux de variation d'une fonction de plusieurs variables dans une certaine direction, notée $f_{\vec{u}}$. La direction est donnée par un vecteur unitaire $\vec{u}$ dans la formule suivante (pour une fonction de trois variables) :

$$f_{\vec{u}}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{u}$$

Exercices

34. Déterminez le taux de variation de $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$ au point $P(2, 1)$ dans la direction de $\vec{u} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$.

35. Déterminez le taux de variation de $g(r, s) = \tan^{-1}(rs)$ au point $P(1, 2)$ dans la direction de $\vec{u} = 5\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$.

36. Déterminez le taux de variation de $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$ au point $P(0, 0, 0)$ dans la direction de $\vec{u} = 5\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$.

37. Soit $f(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$ et le point $P(3, 4, 5)$. Déterminez le taux de variation de f en P dans la direction du vecteur $\vec{u} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$.

4 Analyse des surfaces

4.1 Surfaces de Niveau

Une surface de niveau est une fonction de trois variables telle que $F(x, y, z) = k$. La normale au plan tangent en un point de cette surface est donnée par le gradient de la fonction en ce point. L'équation du plan tangent s'écrit :

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Cette équation est une généralisation de celle donnée pour le plan tangent à une fonction de deux variables.

Exercices

38. Trouvez les équations de la normale et du plan tangent à

$$2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10$$

au point $P(3, 3, 5)$.

39. Trouvez les équations de la normale et du plan tangent à

$$y = x^2 - z^2$$

au point $P(4, 7, 3)$.

40. Trouvez les équations de la normale et du plan tangent à

$$xyz^2 = 6$$

au point $P(3, 2, 1)$.

41. Trouvez les équations de la normale et du plan tangent à

$$xy + yz + zx = 5$$

au point $P(1, 2, 1)$.

42. Trouvez les équations de la normale et du plan tangent à

$$x + y + z = e^{xyz}$$

au point $P(0, 0, 1)$.

43. Trouvez les équations de la normale et du plan tangent à

$$x^4 + y^4 + z^4 = 3x^2y^2z^2$$

au point $P(3, 3, 5)$.

44. Déterminez à quel point le plan tangent à la paraboloïde $y = x^2 + z^2$ est parallèle au plan $x + 2y + 3z = 1$.

45. Déterminez s'il existe des points sur l'hyperboloïde $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ où le plan tangent est parallèle au plan $z = x + y$.

46. Soit la fonction :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Trouver l'équation du plan tangent au graphe de $f(x, y)$ au point $(1, 0)$.
(b) Étudiez la continuité de la fonction f dans $\mathbb{R}^2$.
(c) Montrez que les dérivées partielles $f_x(0, 0)$ et $f_y(0, 0)$ existent.
(d) Montrez que les dérivées partielles $f_x(x, y)$ et $f_y(x, y)$ ne sont pas continues en $(0, 0)$.

4.2 Valeurs Extrêmes

Un point (a, b) est appelé un point critique de f si $f_x(a, b) = 0$ et $f_y(a, b) = 0$, ou si l'une de ces deux dérivées partielles n'existe pas.

Si $f(x, y)$ possède un maximum ou un minimum local au point (a, b), alors ce point est un point critique. Pour déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum local, on utilise le test des dérivées secondes :

$$\text{Soient } \alpha_1 = f_{xx}(a,b) \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$$

(a) Si $\alpha_2 > 0$ et $\alpha_1 > 0$, alors f possède un **minimum local** en (a, b).
(b) Si $\alpha_2 > 0$ et $\alpha_1 < 0$, alors f possède un **maximum local** en (a, b).
(c) Si $\alpha_2 < 0$, alors (a, b) n'est ni un maximum local ni un minimum local.

Exercices

47. Évaluez les points critiques de

$$f(x,y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$$

48. Évaluez les points critiques de

$$f(x,y) = (x - y)(1 - xy)$$

49. Évaluez les points critiques de
$$f(x,y) = xe^{-2x^2-2y^2}$$

50. Évaluez les points critiques de
$$f(x,y) = xy(1-x-y)$$

51. Évaluez les points critiques de
$$f(x,y) = e^x \cos(y)$$

52. Évaluez les points critiques de
$$f(x,y) = y \cos x$$

53. Évaluez les points critiques de
$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{y^2-x^2}$$

4.3 Théorème des valeurs extrêmes

Si f est continue sur un ensemble fermé et borné $D \subset \mathbb{R}^2$, alors f possède un maximum absolu et un minimum absolu en des points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de D.
Pour trouver le maximum et le minimum absolus d'une fonction sur un ensemble fermé et borné D :

(a) On calcule les valeurs de f aux points critiques de f contenus dans D.

(b) On calcule les extremums de f sur la frontière de D.

(c) La plus grande des valeurs obtenues aux étapes (a) et (b) est le maximum absolu, et la plus petite est le minimum absolu.

Exercices

54. Soient $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ et D la région triangulaire fermée avec sommets $(2,0)$, $(0,2)$ et $(0,-2)$. Trouvez le maximum absolu et le minimum absolu de f dans le domaine D.

55. Soient $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ et $D = \{(x,y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Trouvez le maximum absolu et le minimum absolu de f dans le domaine D.

56. Soient $f(x,y) = xy^2$ et $D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$. Trouvez le maximum absolu et le minimum absolu de f dans le domaine D.

4.4 Multiplicateurs de Lagrange

Pour trouver le minimum et le maximum d'une fonction $f(x, y, z)$ sous la contrainte $g(x, y, z) = k$ (en supposant que ces extremums existent et que $\nabla g \neq \vec{0}$ sur la surface $g(x, y, z) = k$), on procède comme suit :

(a) On trouve toutes les valeurs de x, y, z et λ telles que :

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z), \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = k$$

(b) On évalue f en tous les points (x, y, z) issus de l'étape (a). La plus grande de ces valeurs est le maximum de f, et la plus petite est le minimum de f.

Pour plusieurs contraintes, nous utilisons :

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

Exercices

57. Utilisez les multiplicateurs de Lagrange pour trouver le maximum et le minimum de $f(x, y) = y^2 - x^2$ sous la contrainte $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$.

58. Utilisez les multiplicateurs de Lagrange pour trouver le maximum et le minimum de $f(x, y) = e^{xy}$ sous la contrainte $x^3 + y^3 = 16$.

59. Utilisez les multiplicateurs de Lagrange pour trouver le maximum et le minimum de $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

60. Utilisez les multiplicateurs de Lagrange pour trouver le maximum et le minimum de $f(x, y, z) = x + 2y$ sous les contraintes :

$$x + y + z = 1, \quad y^2 + z^2 = 4$$

61. Utilisez les multiplicateurs de Lagrange pour trouver le maximum et le minimum de $f(x, y, z) = yz + zy$ sous les contraintes :

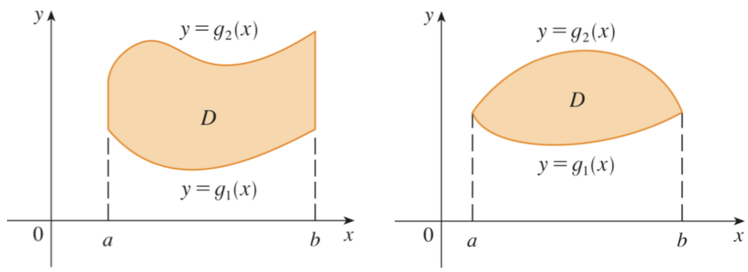
$$xy = 1, \quad y^2 + z^2 = 1$$

5 Intégration multiple

5.1 Intégrales Doubles

Une région plane D est de type I si elle est comprise entre les graphes de deux fonctions continues de x :

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

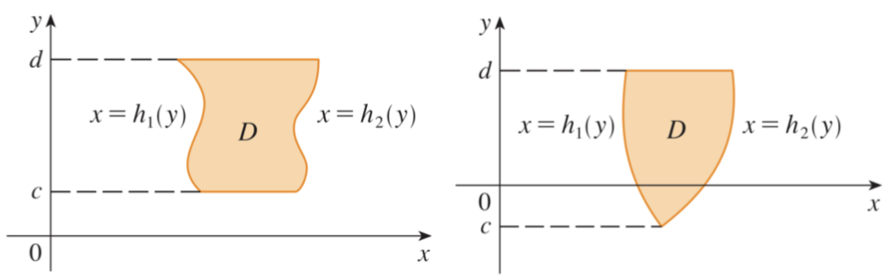


Si f est définie sur une région de type I, alors :

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Une région plane D est de type II si elle est comprise entre les graphes de deux fonctions continues de y :

$$D = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d,\ \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$



Si f est définie sur une région de type II, alors :

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Exercices

62. Évaluez $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{x^2} (1+2y)\,dy\,dx$.

63. Évaluez $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^5+1}\,dA$, où $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x,\ \ 0 \leq y \leq x^2\}$.

64. Évaluez $\displaystyle\iint_D \left(x^2+2y\right)\,dA$, où $D = \{(x,y) \mid y = x,\ \ y = x^3,\ \ x \geq 0\}$.

65. Évaluez $\displaystyle\iint_D xy^2\,dA$, D étant la région fermée entre $x = 0$ et $x = \sqrt{1-y^2}$.

66. Déterminez le volume du solide sous le plan $x - 2y + z = 1$ et au-dessus de la région bornée par $x + y = 1$ et $x^2 + y = 1$.

67. Déterminez le volume du solide enfermé par le paraboloïde $z = x^2 + 3y^2$ et les plans $x = 0$, $y = 1$, $y = x$ et $z = 0$.

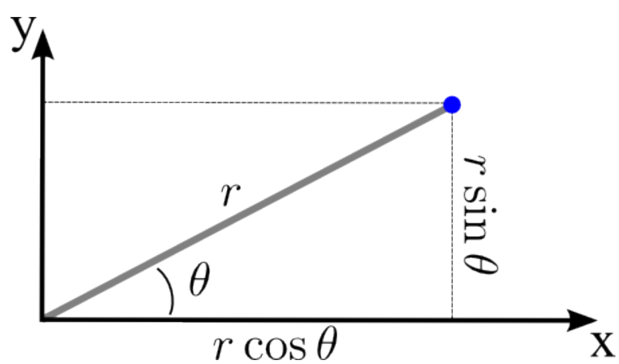
68. Déterminez le volume du solide borné par les plans de coordonnées et le plan $3x+2y+z = 6$.

69. Déterminez le volume du solide borné par le cylindre $y^2 + z^2 = 4$ et les plans $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$, dans le premier octant.

5.2 Coordonnées Polaires

Les coordonnées polaires (r, θ) d'un point sont reliées aux coordonnées cartésiennes (x, y) par les équations :

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$



Si f est continue sur une région polaire de la forme :

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

alors :

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Exercices

70. Évaluez $\iint_R \frac{y^2}{x^2+y^2}\, dA$, où R est la région bornée par les cercles $x^2 + y^2 = a^2$ et $x^2 + y^2 = b^2$, avec $0 < a < b$.

71. Déterminez l'aire de la région à l'intérieur du cercle $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ et en dehors du cercle $x^2 + y^2 = 1$.

72. Déterminez l'aire de la région à l'intérieur du cardioïde $r = 1 + \cos\theta$ et en dehors du cercle $r = 2\cos\theta$.

73. Déterminez le volume en dessous du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et au-dessus du disque $x^2 + y^2 \leq 4$.

74. Déterminez le volume en dessous de la paraboloïde $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ et au-dessus du plan $z = 0$.

75. Déterminez le volume enfermé par l'hyperboloïde $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ et le plan $z = 2$.

76. Déterminez le volume enfermé par le cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et l'ellipsoïde $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

77. Utilisez les multiplicateurs de Lagrange pour trouver le maximum et le minimum de $f(x, y, z) = e^{xyz}$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 = 24$.

78. Soient :

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left\{(x, y) \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1,\ \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq x\right\}, \\
D_2 &= \left\{(x, y) \;\middle|\; 1 \leq x \leq \sqrt{2},\ 0 \leq y \leq x\right\}, \\
D_3 &= \left\{(x, y) \;\middle|\; \sqrt{2} \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}.
\end{aligned}$$

Déterminez $\iint_{D_1 \cup D_2 \cup D_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$.

79. Déterminez $\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dA$, où D est la région bornée par le demi-cercle $x = \sqrt{4 - y^2}$ et l'axe des ordonnées.

5.3 Intégrales Triples

Les intégrales triples sont définies sur trois types de régions.

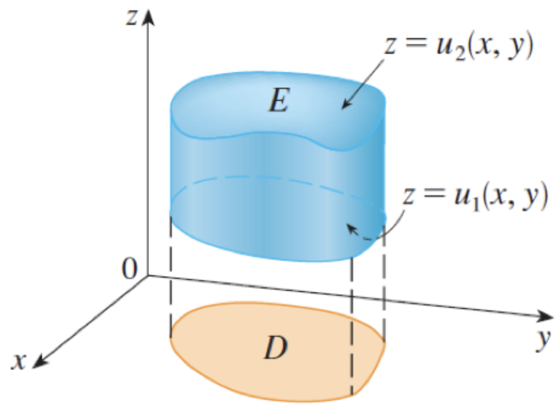
Région solide de type I

Une région solide de type I est située entre les graphes de deux fonctions continues de x et y, c'est-à-dire que :

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

Ce qui nous donne :

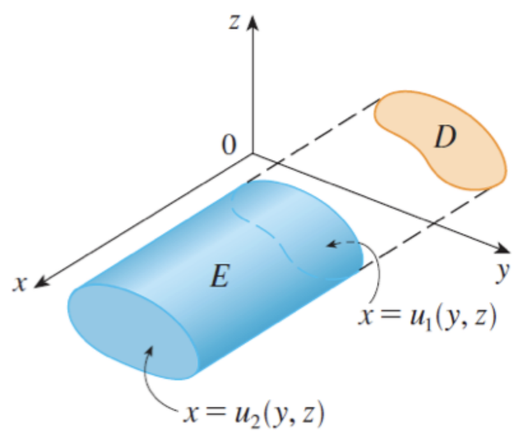
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right] dA$$



Région solide de type II

Une région solide de type II possède la forme :

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$



Ce qui nous donne :

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA$$

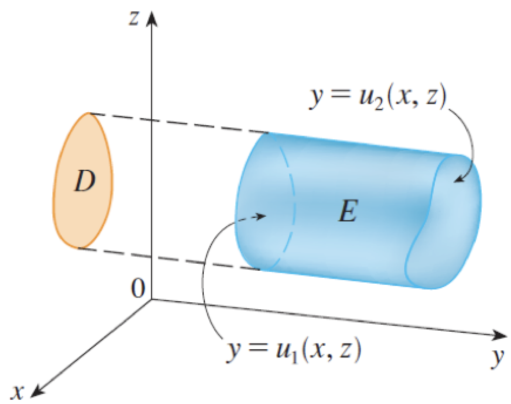
Région solide de type III

Une région solide de type III possède la forme :

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

Ce qui nous donne :

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA$$



Exercices

80. Évaluez

$$\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y)\, dx\, dy\, dz$$

81. Évaluez

$$\int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln(x)} xe^{-y}\, dy\, dx\, dz$$

82. Évaluez

$$\iiint_E y\, dV, \quad \text{où } E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq x,\ x - y \leq z \leq x + y\}$$

83. Évaluez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{y} \int_0^{x} \cos(x + y + z)\, dz\, dx\, dy$$

84. Évaluez

$$\iiint_E x\, dV, \quad \text{où } E \text{ est borné par le paraboloïde } x = 4y^2 + 4z^2 \text{ et le plan } x = 4$$

85. Évaluez

$$\iiint_E z\, dV, \quad \text{où } E \text{ est borné par le cylindre } y^2 + z^2 = 9 \text{ et les plans } x = 0,\ y = 3x,\ z = 0 \text{ dans le premie}$$

86. Utilisez une intégrale triple pour déterminer le volume du solide enfermé par les paraboloïdes :

$$y = x^2 + z^2 \quad \text{et} \quad y = 8 - x^2 - z^2$$

87. Utilisez une intégrale triple pour déterminer le volume du solide enfermé par :

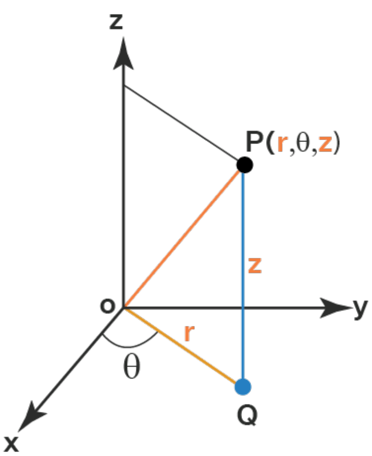
$$\text{le cylindre } y = x^2, \quad \text{et les plans } z = 0 \text{ et } y + z = 1$$

88. Utilisez une intégrale triple pour déterminer le volume du solide enfermé par :

$$\text{le cylindre } x^2 + z^2 = 4, \quad \text{et les plans } y = -1 \text{ et } y + z = 4$$

5.4 Coordonnées Cylindriques

Le système de coordonnées cylindriques représente un point P dans un espace à trois dimensions par un triplet (r, θ, z), où r et θ sont les coordonnées polaires de la projection de P dans le plan xy, et z est la distance entre le plan xy et P.



Nous pouvons utiliser ce système de coordonnées pour évaluer des intégrales triples en utilisant la formule suivante :

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

Exercices

89. Évaluez $\iiint_E z\,dV$, où E est borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 4$.

90. Évaluez $\iiint_E (x+y+z)\,dV$, où E est le solide dans le premier octant borné par le paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$.

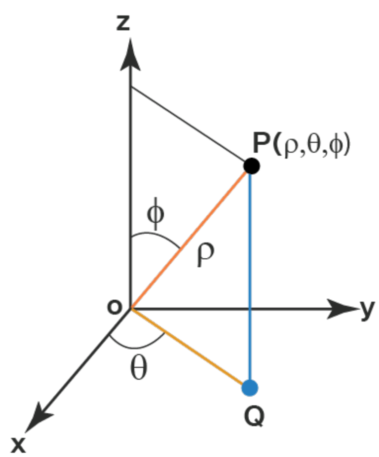
91. Déterminez le volume du solide borné par le cylindre $x^2+y^2 = 1$ et la sphère $x^2+y^2+z^2 = 4$.

92. Déterminez le volume du solide borné par le cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$ et la sphère $x^2+y^2+z^2 = 2$.

93. Déterminez le volume du solide qui réside entre le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

5.5 Coordonnées Sphériques

Le système de coordonnées sphérique représente un point P dans un espace à trois dimensions par un triplet (ρ, θ, ϕ) oú ρ est la distance de l'origine à P, θ est le méme angle que dans les coordounées cylíndriques et ϕ est l'angle formé par l'axe des z positifs et la droite reliant I'origine an point P.



Nous pouvons utiliser ce système de coordonnées pour évaluer des intégrales triples en utilisant la formule suivante :

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

Exercices

94. Évaluez $\iiint_H (9 - x^2 - y^2)\, dV$, où H est l'hémisphère solide $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq 0$.

95. Évaluez $\iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E réside entre les sphères $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

96. Évaluez $\iiint_E y^2 \, dV$, où E est l'hémisphère solide $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $y \geq 0$.

97. Évaluez $\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2}\, dV$, où E est la portion de la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ dans le premier octant.

98. Évaluez $\iiint_E xyz\, dV$, où E réside entre les sphères $\rho = 2$ et $\rho = 4$ au-dessus du cône $\phi = \frac{\pi}{3}$.

5.6 Changement de Variables (Jacobien)

Lorsque l'on effectue une intégrale double $\iint_R f(x, y)\, dA$, il peut être utile de transformer la région R ainsi que la fonction $f(x, y)$ en de nouvelles variables (u, v) plus simples à manipuler. Cette technique s'appelle un **changement de variables**.

Principe général

Supposons que nous avons une transformation bijective et différentiable entre les variables (x, y) et les variables (u, v) donnée par :

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

Cela signifie que chaque point (x, y) de la région R est obtenu à partir d'un point (u, v) d'une région S dans le plan (u, v).

Le rôle du Jacobien

Lorsqu'on change de variables dans une intégrale double, l'aire d'un petit élément dA dans le plan (x, y) devient une aire équivalente en (u, v) multipliée par un facteur de correction : le **jacobien**. Le **jacobien** est le déterminant de la matrice des dérivées partielles :

Cas à deux variables :

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

De façon similaire, le volume d'un petit élément dV dans l'espace (x, y, z) devient un volume équivalent en (u, v, w)

Cas à trois variables :

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant donne le **facteur d'échelle local** de la transformation. Intuitivement, il représente comment une petite surface (ou volume) est déformée localement par le changement de variables.

Exemple

On considère deux fonctions définies en fonction de deux variables u et v :

$$x = uv \quad \text{et} \quad y = \frac{u}{v}$$

Nous souhaitons calculer le jacobien du changement de variables, c'est-à-dire le déterminant de la matrice jacobienne suivante :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Commençons par calculer chaque dérivée partielle :

— $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(uv) = v$, car on dérive par rapport à u en considérant v constant.
— $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(uv) = u$, même raisonnement, ici u est constant.
— $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v}$, car la dérivée de u par rapport à u est 1, et $\frac{1}{v}$ est constant.
— $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right) = -\frac{u}{v^2}$, car on dérive par rapport à v, en utilisant la règle : $\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}$.

On peut maintenant construire la matrice jacobienne :

$$J = \begin{bmatrix} v & u \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{bmatrix}$$

Le jacobien est le déterminant de cette matrice :

$$\det(J) = v \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) - u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)$$

Calculons terme à terme :

$$v \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) = -\frac{uv}{v^2} = -\frac{u}{v} \quad \text{et} \quad u \cdot \left(\frac{1}{v}\right) = \frac{u}{v}$$

En les combinant :

$$\det(J) = -\frac{u}{v} - \frac{u}{v} = -\frac{2u}{v}$$

Donc, le jacobien est :

$$\boxed{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{2u}{v}}$$

Exercices

99. Soit $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. Calculez le jacobien.

100. Soit $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$. Trouvez le jacobien.

101. Interprétez géométriquement ce que signifie un jacobien nul.

2. Jacobien et Intégrales Doubles

Changement de variables

Si la transformation $T(u,v) = (x,y)$ est appliquée à une région S, alors l'intégrale double devient :

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

où :

— R est la région dans le plan (x,y),

— S est la région correspondante dans le plan (u,v),

— $f(x,y)$ est réécrite en fonction de u et v,

— $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ est la valeur absolue du jacobien.

Exemple

On souhaite calculer l'intégrale double suivante :

$$\iint_R xy\,dx\,dy$$

où R est la région en forme de losange définie par les inégalités :

$$|x+y| \leq 2 \quad \text{et} \quad |x-y| \leq 2$$

Étape 1 – Changement de variables :
On pose un changement de variables qui va simplifier la région R :

$$u = x+y, \quad v = x-y$$

Ce changement est utile car les bornes de la région sont données directement en fonction de $x+y$ et $x-y$.
Résolvons ce système pour exprimer x et y en fonction de u et v :

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}$$

Étape 2 – Calcul du jacobien :
On doit maintenant calculer le jacobien du changement de variables, c'est-à-dire le déterminant de la matrice des dérivées partielles de (x,y) par rapport à (u,v) :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u+v}{2}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u+v}{2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u-v}{2}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u-v}{2}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Exemple

Calculons le déterminant :

$$\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Donc, la valeur absolue du jacobien est :

$$|J| = \frac{1}{2}$$

Étape 3 – Nouvelle région d'intégration :
Les contraintes originales sur $x + y$ et $x - y$ deviennent des contraintes simples sur u et v :

$$|u| \leq 2 \quad \text{et} \quad |v| \leq 2 \quad \Rightarrow \quad u \in [-2, 2],\ v \in [-2, 2]$$

La nouvelle région S est donc un carré dans le plan (u, v), de côté 4 centré à l'origine.
Étape 4 – Nouvelle intégrale :
Remplaçons x et y dans l'intégrande :

$$xy = \left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

On utilise l'identité remarquable : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, ce qui donne :

$$xy = \frac{(u+v)(u-v)}{4} = \frac{u^2 - v^2}{4}$$

En tenant compte du facteur provenant du jacobien ($|J| = \frac{1}{2}$), l'intégrale devient :

$$\iint_S \left(\frac{u^2 - v^2}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}\, du\, dv = \iint_S \frac{u^2 - v^2}{8}\, du\, dv$$

On a donc transformé l'intégrale initiale sur une région compliquée en une intégrale beaucoup plus simple sur un carré.

Exercices

102. Calculez :

$$\iint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy \quad \text{où } R \text{ est le disque } x^2 + y^2 \leq 1$$

en utilisant les coordonnées polaires.

103. Effectuez le changement de variables $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ pour :

$$\iint_R x e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

3. Jacobien et Intégrales Triples

Formule générale

Pour une transformation $T(u, v, w) = (x, y, z)$, on a :

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$

Exemple

On souhaite évaluer l'intégrale triple suivante :

$$\iiint_R z\, dV$$

où R est la région de l'espace définie par :

- $x^2 + y^2 \leq 1$: c'est un cylindre de rayon 1 centré sur l'axe z,
- $z \in [0, 1]$: la hauteur du cylindre va de 0 à 1,
- $x \geq 0, y \geq 0$: on ne considère que le premier quadrant du plan xy.

La région R est donc un quart de cylindre droit de rayon 1 et de hauteur 1.
Étape 1 – Changement de variables :
Pour simplifier le domaine, on passe en coordonnées cylindriques, adaptées aux régions circulaires :

$$x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta, \quad z = z$$

Dans ce système, le volume élémentaire $dV = dx\, dy\, dz$ devient $r\, dr\, d\theta\, dz$ à cause du jacobien des coordonnées cylindriques, qui vaut :

$$J = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = r$$

Étape 2 – Domaine en coordonnées cylindriques :
On traduit maintenant les bornes du domaine R :

- $x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow r \in [0, 1]$,
- Le quart de plan $x \geq 0, y \geq 0$ correspond à $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
- Et $z \in [0, 1]$ reste inchangé.

Le domaine cylindrique devient donc :

$$r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad z \in [0, 1]$$

Exemple

Étape 3 – Nouvelle intégrale :
L'intégrande z reste le même (puisque $z = z$ en cylindriques), mais on ajoute le facteur r provenant du changement de variables. On obtient :

$$\iiint_R z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^1 z \cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

On commence par intégrer par rapport à z :

$$\int_0^1 z \cdot r\,dz = r \int_0^1 z\,dz = r \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}r$$

On reporte dans l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{1}{2}r\,dr\,d\theta$$

Intégrons maintenant par rapport à r :

$$\int_0^1 \frac{1}{2}r\,dr = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Enfin, intégrons par rapport à θ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\,d\theta = \frac{1}{4}\,[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Résultat final :

$$\boxed{\iiint_R z\,dV = \frac{\pi}{8}}$$

Exercices

104. Passez en coordonnées cylindriques :

$$\iiint_R x^2 + y^2\,dV \quad \text{où } R \text{ est la boule de rayon 2}$$

105. En coordonnées sphériques :

$$\iiint_R z\,dV \quad \text{où } R \text{ est l'hémisphère supérieur de rayon 1}$$