Bootcamp Intensif – Algèbre linéaire
Préparation à l'examen mi-session

Vachon Victor

Table des matières

---

1 À qui s'adresse ce bootcamp ?

Ce bootcamp a été conçu pour les étudiants de premier cycle universitaire qui débutent en **Calcul différentiel (Calculus I)** et en **Algèbre linéaire** – des cours fondamentaux suivis par de nombreux étudiants en *mathématiques*, *physique*, *informatique*, *génie* et autres disciplines scientifiques. Ces cours, bien que très abordables sur le plan conceptuel, sont souvent vécus comme difficiles. Non pas à cause de la matière elle-même, mais à cause du **choc de l'entrée à l'université** : nouvelles méthodes de travail, charge de cours importante, autonomie soudaine... Résultat : beaucoup d'étudiants comprennent les concepts, mais échouent aux examens. Et souvent, le problème est simple : **manque de pratique indépendante**, sans correction immédiate, sans filet.
Ce **bootcamp** n'est **pas** un cours de théorie. Il n'a pas vocation à remplacer les excellents manuels existants. Il est là pour **entraîner**, comme un programme intensif de révision avant un *midterm* ou un *final*. Chaque PDF est conçu pour représenter **deux jours complets** de travail intensif – idéalement un week-end – avec :

- un rappel **concis** de ce qu'il faut **vraiment connaître** pour réussir l'examen ;
- les **formules essentielles** à maîtriser ;
- et surtout, des **exercices ciblés**, tirés ou inspirés d'anciens examens d'universités variées, pour s'exercer à fond sur chaque notion.

Les présentes notes sont basées sur ***Linear Algebra and its Applications*** de David Lay pour l'algèbre linéaire, et sur ***Calculus : Early Transcendentals (8e édition)*** de James Stewart pour Calculus I. Si vous rencontrez des passages conceptuels qui vous bloquent, je vous recommande vivement de vous référer à ces ouvrages pour approfondir votre compréhension. De plus, la préparation à l'examen final n'est pas un récapitulatif complet du cours. Pour couvrir l'ensemble de la matière, il est essentiel de faire également la préparation à l'examen de mi-session.

Bonne préparation, bon courage... et bonne chance !

2 Espaces vectoriels

2.1 Définitions et propriétés de base

Un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs qui est fermé sous deux opérations, et où huit propriétés additionnelles sont satisfaites — soit un total de 10 propriétés. Pour l'examen intra, vous n'avez qu'à connaître trois de ces dix propriétés.

Fermeture d'un ensemble

Que signifie qu'un ensemble est fermé sous une opération ? Cela veut simplement dire que si nous prenons n'importe quel élément de l'ensemble et que nous effectuons une opération dessus, le résultat appartient encore à l'ensemble.
Les deux opérations que nous pouvons effectuer sur des vecteurs sont :

- l'addition vectorielle ;
- la multiplication scalaire.

Pour que nous ayons un espace vectoriel, nous devons donc observer que :

1. si nous prenons deux vecteurs et que nous les additionnons, le résultat est un vecteur appartenant à notre espace vectoriel ;

2. si nous prenons un vecteur et que nous le multiplions par un scalaire, le vecteur obtenu appartient aussi à l'espace vectoriel ;

3. en plus de ces deux propriétés, l'ensemble doit contenir le vecteur nul.

Le vecteur nul est facile à visualiser pour chaque type d'espace vectoriel. Dans le cadre du cours, nous utilisons trois types d'espaces vectoriels :

1. Les vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, où n indique le nombre de coordonnées. Par exemple, l'espace $\mathbb{R}^2$ est le plan cartésien en deux dimensions, et un vecteur typique est représenté par (a_0, a_1) où a_0 et a_1 sont les coordonnées en x et y respectivement.

2. Les vecteurs dans $\mathbb{M}_{m\times n}$. Ce sont les matrices avec m lignes et n colonnes.

3. Les vecteurs dans $\mathbb{P}_n$, soit l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Par exemple, le polynôme $x^2 + 7x - 5$ appartient à $\mathbb{P}_2$.

Pour le reste du document, nous allons utiliser le symbole $\in$ pour signifier "appartient à". Petit rappel : pour connaître le degré d'un polynôme, on considère l'exposant le plus élevé de x.

Note importante

Pourquoi dit-on que $\mathbb{P}_n$ est l'ensemble des polynômes de degrés *inférieurs ou égaux* à n ? Pourquoi pas seulement ceux de degré exactement égal à n ?
Prenons par exemple les deux vecteurs suivants :

$$x^2 + 3x + 1, \quad -x^2 - 5x + 2 \in \mathbb{P}_2$$

Si nous les additionnons, nous obtenons :

$$(x^2 + 3x + 1) + (-x^2 - 5x + 2) = -2x + 3$$

Le résultat est $-2x + 3$, un polynôme de degré 1. Ce polynôme ne fait pas partie de l'ensemble des polynômes de degré strictement égal à 2. Cet ensemble n'est donc pas fermé sous l'addition vectorielle, et n'est pas un espace vectoriel.
C'est pourquoi nous définissons toujours $\mathbb{P}_n$ comme l'espace des polynômes de degrés *inférieurs ou égaux* à n.

Vecteurs nuls

— Dans $\mathbb{R}^n$, le vecteur nul est celui dont toutes les composantes valent zéro.
— Dans $\mathbb{M}_{m\times n}$, c'est une matrice de m lignes et n colonnes dont toutes les entrées sont nulles.
— Dans $\mathbb{P}_n$, le vecteur nul est simplement le polynôme zéro, soit le nombre 0.

2.2 Sous-espaces vectoriels

Définition

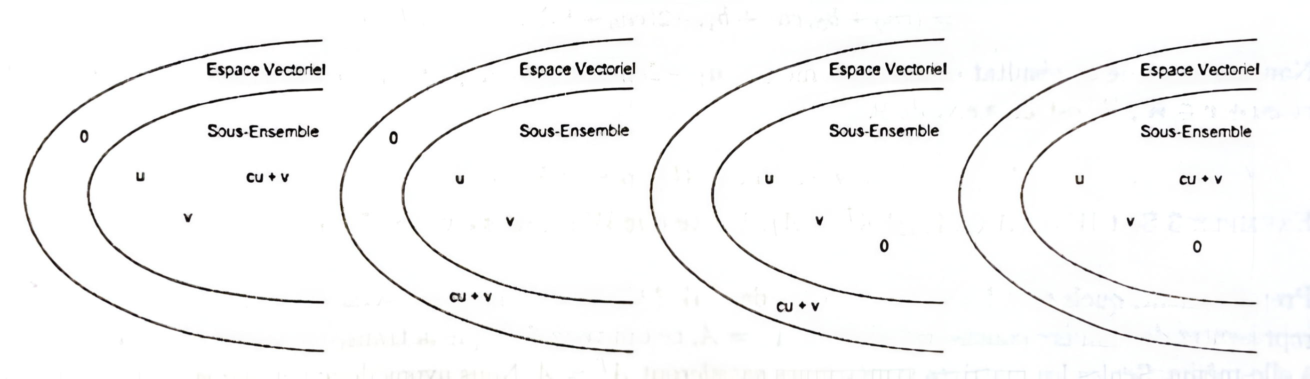
En résumé, les trois propriétés essentielles des espaces vectoriels sont :

1. Être fermé sous l'addition vectorielle ;

2. Être fermé sous la multiplication scalaire ;

3. Contenir le vecteur nul.

Ces trois propriétés sont utiles pour démontrer qu'un ensemble de vecteurs est un *sous-espace vectoriel* (abrégé s.e.v.). Un s.e.v. est un sous-ensemble d'un espace vectoriel qui est lui-même un espace vectoriel.



Comment démontrer qu'un sous-ensemble est un espace vectoriel ?

Une approche consisterait à démontrer que les dix propriétés des espaces vectoriels sont satisfaites. Mais puisqu'on travaille dans un sous-ensemble d'un espace vectoriel, on sait que sept de ces dix propriétés sont automatiquement vérifiées.

Il suffit alors de vérifier les trois propriétés suivantes :

1. Le vecteur nul appartient au sous-ensemble ;

2. Le sous-ensemble est fermé sous l'addition vectorielle ;

3. Le sous-ensemble est fermé sous la multiplication scalaire.

Méthode pratique

Nous pouvons vérifier les deux dernières propriétés en une seule étape : on prend deux vecteurs u et v du sous-ensemble et on vérifie que l'expression $cu + v$ (où c est un scalaire) appartient aussi au sous-ensemble.

Parmi les quatre scénarios illustrés, seul le scénario de droite correspond à un sous-espace vectoriel, puisqu'il contient à la fois $cu + v$ et le vecteur nul.

Exemple

Soit $W = \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid a_0 = a_2 + 2\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?
Premièrement, à quoi ressemble un vecteur arbitraire $u \in W$? Un vecteur dans $\mathbb{R}^3$ est de la forme (a_0, a_1, a_2). En utilisant la contrainte $a_0 = a_2 + 2$, on peut écrire :

$$u = (a_2 + 2, a_1, a_2)$$

Étape 1 : Est-ce que le vecteur nul appartient à W ? Le vecteur nul dans $\mathbb{R}^3$ est $(0, 0, 0)$. Ici, $a_2 = 0$ implique $a_0 = 2$, donc le vecteur nul n'est pas dans W.
Conclusion : Comme $0 \notin W$, alors W n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Exemple

Soit $W = \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a_0 - 7a_1 + a_2 = 0\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?
On peut isoler a_2 :

$$a_2 = -2a_0 + 7a_1$$

Donc un vecteur arbitraire $u \in W$ est de la forme :

$$u = (a_0, a_1, -2a_0 + 7a_1)$$

Étape 1 : Le vecteur nul appartient-il à W ?

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0 \Rightarrow u = (0, 0, -2 \cdot 0 + 7 \cdot 0) = (0, 0, 0)$$

Donc $0 \in W$.
Étape 2 : Vérifions si $cu + v \in W$ pour $u, v \in W$ et $c \in \mathbb{R}$:

$$u = (a_0, a_1, -2a_0 + 7a_1), \quad v = (b_0, b_1, -2b_0 + 7b_1)$$

$$\begin{aligned} cu + v &= c(a_0, a_1, -2a_0 + 7a_1) + (b_0, b_1, -2b_0 + 7b_1) \\ &= (ca_0 + b_0, ca_1 + b_1, -2ca_0 + 7ca_1 - 2b_0 + 7b_1) \\ &= (ca_0 + b_0,\ ca_1 + b_1,\ -2(ca_0 + b_0) + 7(ca_1 + b_1)) \end{aligned}$$

La troisième composante est de la forme $-2a_0 + 7a_1$ avec $a_0 = ca_0 + b_0$, $a_1 = ca_1 + b_1$.
Conclusion : $cu + v \in W$, donc W est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Exemple

Soit $W = \{A \in \mathbb{M}_{2\times 2} \mid A^T = A\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{M}_{2\times 2}$?
Les éléments de W sont les matrices symétriques. Un vecteur arbitraire $u \in W$ est donc :

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Étape 1 : Le vecteur nul de $\mathbb{M}_{2\times 2}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est bien symétrique, donc $0 \in W$.
Étape 2 : Soient $u, v \in W$, avec :

$$u = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$cu + v = c\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_0 + b_0 & ca_1 + b_1 \\ ca_1 + b_1 & ca_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est encore symétrique, donc $cu + v \in W$.
Conclusion : W est un s.e.v. de $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Exercices

1. Soit $W = \{A \in \mathbb{M}_{2\times 2} \mid A \text{ est triangulaire supérieure}\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{M}_{2\times 2}$?

2. Soit $W = \{p \in \mathbb{P}_n \mid p(0) = 0\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{P}_n$?

3. Soit $W = \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid a_0 + 2a_1 + 3a_2 = 1\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?

4. Soit $W = \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid 5a_0^2 - 3a_1^2 + 2a_2^2 = 0\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?

5. Soit $W = \{(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \mid a_0 \geq 0,\ a_1 = 0\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$?

6. Soit $W = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 3v,\ A \in \mathbb{M}_{3\times 3}\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?

7. Soit $W = \{A \in \mathbb{M}_{2\times 2} \mid A^2 = A\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{M}_{2\times 2}$?

8. Soit $W = \left\{p(x) \in \mathbb{P}_2 \mid \int_0^1 p(x)\,dx = 0\right\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{P}_2$?

9. Soit $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 \mid p'(-1) = 0,\ p''(1) = 0\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{P}_3$?

10. Soit $W = \{A \in \mathbb{M}_{2\times 2} \mid a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{M}_{2\times 2}$?

11. Soit $W = \left\{A \in \mathbb{M}_{2\times 2} \mid A^T = -A\right\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{M}_{2\times 2}$? (matrices antisymétriques)

12. Soit $W = \left\{A \in \mathbb{M}_{2\times 2} \,\middle|\, A^T J - JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{M}_{2\times 2}$? Donner aussi la famille génératrice.

3 Théorie des espaces vectoriels finis

Avant d'aller plus loin, le lecteur est invité à consulter la section 4.1 sur l'élimination de Gauss et de Gauss-Jordan, un outil particulièrement utile qui vous fera gagner un temps précieux.

3.1 Indépendance linéaire

Un ensemble de vecteurs est dit **linéairement indépendant** s'il est impossible d'exprimer un des vecteurs comme une combinaison linéaire des autres.
Un vecteur u est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ s'il existe des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

Ainsi, un ensemble est linéairement **dépendant** s'il est possible d'écrire un vecteur de l'ensemble comme combinaison linéaire des autres.

Cas de deux vecteurs

Soit un ensemble $\{u, v\}$. Ces deux vecteurs sont linéairement dépendants s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$u = av \quad \text{ou} \quad v = au$$

Exemple

$u = (1, 4)$ et $v = (2, 8)$
On remarque que $v = 2u$, donc u et v sont linéairement dépendants.

Cas de plusieurs vecteurs

Considérons l'ensemble :

$$E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} v_1 &= (2, -1, 4) \\ v_2 &= (1, -1, 3) \\ v_3 &= (1, 1, -1) \\ v_4 &= (1, -2, -1) \end{aligned}$$

On cherche à savoir si v_4 est une combinaison linéaire des autres :

$$v_4 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

Ce qui donne le système :

$$(1, -2, -1) = a_1(2, -1, 4) + a_2(1, -1, 3) + a_3(1, 1, -1)$$

On résout le système[1] :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

La dernière ligne montre que le système est impossible : $0 = -6$. Donc v_4 n'est pas combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3.
En revanche, on peut vérifier que :

$$v_3 = 2v_1 - 3v_2 + 0v_4 \Rightarrow 2v_1 - 3v_2 - v_3 + 0v_4 = 0$$

Donc le vecteur nul est une combinaison non triviale des vecteurs de E, ce qui montre que l'ensemble est linéairement dépendant.

Méthode générale

Pour tester l'indépendance linéaire d'un ensemble $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$:

1. Résoudre le système :
$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$$
2. Si la seule solution est $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, l'ensemble est **linéairement indépendant**.
3. Sinon, il est **linéairement dépendant**.

1. Ici on utilise l'élimination de Gauss-Jordan, voir dans la section prochaine.

Exemple

L'ensemble de vecteurs :

$$E = \{(1,3,-4,2),(2,2,-4,0),(1,-3,2,-4),(-1,0,1,0)\}$$

est-il linéairement indépendant ?
Nous devons résoudre le système d'équations suivant :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La solution est : $a_4 = 0$, $a_3 = s$, $a_2 = -\frac{3}{2}s$, $a_1 = 2s$. Ce n'est pas la solution triviale, donc E est linéairement dépendant.
Par exemple, pour $s = 2$:

$$4(1,3,-4,2) - 3(2,2,-4,0) + 2(1,-3,2,-4) + 0(-1,0,1,0) = (0,0,0,0)$$

Exemple

L'ensemble de vecteurs

$$E = \left\{x^3 + 2x^2,\ -x^2 + 3x + 1,\ x^3 - x^2 + 2x - 1\right\}$$

est-il linéairement indépendant ?
On construit une matrice avec les coefficients de $x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3$ pour chaque polynôme :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On trouve uniquement la solution triviale $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Donc E est linéairement indépendant.

Exercices

13. L'ensemble de vecteurs

$$E = \left\{x^3 - x,\ 2x^2 + 4,\ -2x^3 + 3x^2 + 2x + 6\right\}$$

est-il linéairement indépendant ?

14. L'ensemble de vecteurs

$$E = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

est-il linéairement indépendant ?

15. L'ensemble de vecteurs

$$E = \{(2,-3,5),\ (1,0,-2),\ (0,2,-1),\ (7,2,0)\}$$

est-il linéairement indépendant ?

16. Soient les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

(a) Sont-ils linéairement indépendants ?

(b) Un vecteur arbitraire $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ peut-il être exprimé comme une combinaison linéaire de $v_1,\ v_2,\ v_3$?

3.2 Ensembles générateurs

Un ensemble de vecteurs est un **ensemble générateur** d'un espace vectoriel V si tout vecteur $v \in V$ peut être exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs de cet ensemble.
Autrement dit, un ensemble de n vecteurs $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ génère V s'il existe une solution à l'équation :

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

où v est un vecteur arbitraire de V.
On note alors :

$$\text{Vect}\,\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = V$$

où Vect désigne l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles des vecteurs $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
Comme nous l'avons vu dans l'exercice 16, l'ensemble $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas un ensemble générateur de $\mathbb{R}^3$ puisqu'il est impossible d'exprimer un vecteur arbitraire $(a,b,c)^T$ comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs.

Exercices

17. Démontrez que les vecteurs

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

génèrent $\mathbb{R}^3$.

18. Démontrez que les polynômes x^2+3x-2, $2x^2+5x-3$ et $-x^2-4x+4$ génèrent $\mathbb{P}_2$.

19. Trouvez une famille génératrice du s.e.v. de l'**exemple** sur les matrices symétriques 2×2.

20. Trouvez une famille génératrice du s.e.v. :

$$W = \left\{ A \in \mathbb{M}_{2\times 2} \,\middle|\, A^T J - JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3.3 Bases

Une **base** d'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs qui est à la fois :

— un **ensemble générateur** ;

— **linéairement indépendant**.

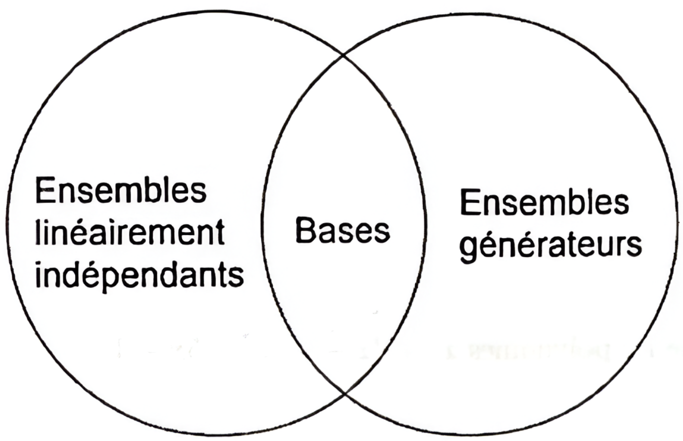
Autrement dit, une base est le plus petit ensemble de vecteurs capable de générer l'espace vectoriel. Le nombre de vecteurs d'une base est appelé la **dimension** de l'espace vectoriel V, et noté $\dim(V)$.

Important :

— Si $n < \dim(V)$, alors l'ensemble ne peut pas générer V.

— Si $n > \dim(V)$, alors l'ensemble ne peut pas être linéairement indépendant.

— Si $n = \dim(V)$, l'ensemble peut être une base si les deux conditions sont satisfaites.



Exemple

Considérons l'ensemble $E = \{(1,0,0),\ (2,3,0)\}$. Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, car ils ne sont pas colinéaires. Toutefois, ils ne peuvent pas générer $\mathbb{R}^3$ car la base de $\mathbb{R}^3$ doit contenir trois vecteurs. Le système :

$$(x, y, z) = a(1,0,0) + b(2,3,0)$$

n'a pas de solution pour un vecteur avec $z \neq 0$.
Ajoutons maintenant le vecteur $(4,5,6)$ à l'ensemble. Ce nouvel ensemble devient :

$$E = \{(1,0,0),\ (2,3,0),\ (4,5,6)\}$$

On peut vérifier que l'ensemble est toujours linéairement indépendant. De plus, puisque nous avons trois vecteurs linéairement indépendants dans un espace de dimension 3, ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.
Voici un exemple de résolution pour prouver que tout vecteur $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ peut être exprimé comme combinaison linéaire :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a_0 \\ 0 & 3 & 5 & a_1 \\ 0 & 0 & 6 & a_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_0 - \frac{2a_1}{3} - \frac{a_2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_1}{3} - \frac{5a_2}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_2}{6} \end{array}\right)$$

Cela confirme que E est une base de $\mathbb{R}^3$.
Enfin, si on ajoute un quatrième vecteur à cette base, par exemple $(7,8,9)$, l'ensemble devient linéairement dépendant. En effet, tout vecteur supplémentaire dans un espace de dimension n peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base.

Exercices

21. Déterminez lesquels des ensembles suivants sont des bases de $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(1,0,-1),\ (2,5,1),\ (0,-4,3)\}$

(b) $\{(2,-4,1),\ (0,3,-1),\ (6,0,-1)\}$

(c) $\{(1,2,-1),\ (1,0,2),\ (2,1,1)\}$

(d) $\{(-1,3,1),\ (2,-4,-3),\ (-3,8,2)\}$

(e) $\{(1,-3,-2),\ (-3,1,3),\ (-2,-10,-2)\}$

22. Déterminez lesquels des ensembles suivants sont des bases de $\mathbb{P}_2$:

(a) $\{-1 - x + 2x^2,\ 2 + x - 2x^2,\ 1 - 2x + 4x^2\}$

(b) $\{1 + 2x + x^2,\ 3 + x^2,\ x + x^2\}$

(c) $\{1 - 2x - 2x^2,\ -2 + 3x - x^2,\ 1 - x + 6x^2\}$

(d) $\{-1 + 2x + 4x^2,\ 3 - 4x - 10x^2,\ -2 - 5x - 6x^2\}$

(e) $\{1 + 2x - x^2,\ 4 - 2x + x^2,\ -1 + 18x - 9x^2\}$

23. Trouvez des bases pour les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^5$:

— $W_1 = \{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5 \mid a_0 - a_2 - a_3 = 0\}$
— $W_2 = \{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5 \mid a_1 = a_2 = a_3,\ a_0 + a_4 = 0\}$

Déterminez également les dimensions de W_1 et W_2.

3.4 Dimension

La **dimension** d'un espace vectoriel V, notée $\dim(V)$, est le *nombre de vecteurs dans une base* de V. Si V admet une base finie, on dit qu'il est de **dimension finie**.

$$\dim(V) = \text{nombre de vecteurs dans n'importe quelle base de } V$$

Toutes les bases d'un même espace vectoriel ont toujours le même nombre d'éléments.

Exemple

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ a pour base canonique :

$$\{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$$

Il contient 3 vecteurs, donc :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

Si un ensemble de n vecteurs est à la fois **linéairement indépendant** et **génère** l'espace V, alors il constitue une base, et :

$$\dim(V) = n$$

Quelques faits utiles :

— Un ensemble de plus de $\dim(V)$ vecteurs est **linéairement dépendant**.
— Un ensemble de moins de $\dim(V)$ vecteurs **ne peut pas engendrer** l'espace entier.

De plus, tout sous-espace $W \subseteq V$ vérifie :

$$\dim(W) \leq \dim(V)$$

et l'égalité se produit si et seulement si $W = V$.

Exemple

L'ensemble des vecteurs de la forme $(x, y, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$ est un **sous-espace de dimension 2** : c'est un plan passant par l'origine.

Exemple

L'ensemble des vecteurs de la forme (x, x, x) dans $\mathbb{R}^3$ est une droite vectorielle : il s'agit d'un **sous-espace de dimension 1**.

Exercices

(a) Trouver la dimension des sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$:

i. L'ensemble des vecteurs $(x, y, 0)$

ii. L'ensemble des vecteurs (x, x, x)

iii. L'espace nul $\{(0, 0, 0)\}$

(b) Déterminer si les ensembles suivants forment une base de $\mathbb{R}^2$:

i. $\{(1, 0),\ (0, 1)\}$

ii. $\{(1, 2),\ (2, 4)\}$

iii. $\{(1, 1),\ (1, -1)\}$

(c) Quelle est la dimension de l'espace des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

4 Systèmes d'équations linéaires

4.1 Élimination de Gauss et Gauss-Jordan

L'élimination de Gauss (et son raffinement, Gauss-Jordan) est une méthode systématique pour résoudre un système d'équations linéaires en transformant sa matrice augmentée par des opérations élémentaires. Ces transformations permettent de simplifier le système jusqu'à pouvoir en déduire directement ses solutions.

Forme échelonnée (ou triangulaire)

Une matrice est dite **en forme échelonnée** si :

- Tous les coefficients sous un pivot sont nuls (on forme un "triangle").
- Chaque ligne non nulle commence par un pivot (premier élément non nul à gauche).
- Le pivot d'une ligne est à droite de celui de la ligne précédente.
- Les lignes nulles (constituées uniquement de zéros) sont en bas.

Exemple

Considérons la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est en forme échelonnée :

- Les pivots sont 1, 1 et 5, chacun plus à droite que le précédent.
- Il n'y a aucun élément non nul sous les pivots.

Forme échelonnée réduite

Une matrice est en **forme échelonnée réduite** si elle est en forme échelonnée, et :

- Tous les pivots valent 1.
- Chaque pivot est le seul élément non nul dans sa colonne.

Exemple

La matrice suivante est en forme échelonnée réduite :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Elle correspond à un système résolu :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Opérations élémentaires sur les lignes

Pour transformer une matrice (ou un système), on peut utiliser les opérations suivantes, qui préservent l'ensemble des solutions du système :

— Échanger deux lignes.

— Multiplier une ligne par un scalaire non nul.

— Ajouter un multiple d'une ligne à une autre.

Exemple

Considérons la matrice augmentée suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

On peut soustraire 2 fois la première ligne à la deuxième :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Méthode pas à pas : Élimination de Gauss et Gauss-Jordan

Pour résoudre un système linéaire avec les méthodes de Gauss ou de Gauss-Jordan, on suit une démarche systématique en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes. Voici les étapes à suivre :

Étape 1 : Écrire la matrice augmentée du système On commence par traduire le système d'équations linéaires sous forme matricielle, en séparant les coefficients des variables et le vecteur des constantes.

Exemple

Résolvons le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 14 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$$

On écrit la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

Étape 2 : Obtenir un pivot (1er élément non nul de la première ligne) On cherche un pivot dans la première colonne (généralement en haut à gauche). Si le coefficient n'est pas déjà 1, on peut diviser la ligne, ou échanger avec une autre ligne.

Étape 3 : Annuler les éléments en dessous du pivot (Méthode de Gauss) À l'aide d'opérations élémentaires, on transforme les éléments en dessous du pivot en zéros.

Exemple

À partir de la matrice précédente :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

On élimine les coefficients sous le pivot (colonne 1) :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

Étape 4 : Répéter pour les colonnes suivantes On recommence avec la sous-matrice restante (à partir de la deuxième ligne et deuxième colonne), en obtenant un pivot et en éliminant les éléments en dessous.

Exemple

On continue avec la matrice précédente :

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Étape 5 : Remonter pour annuler au-dessus des pivots (Méthode de Gauss-Jordan) Une fois la matrice en forme échelonnée, on peut aller plus loin et obtenir la forme échelonnée **réduite** en annulant les éléments au-dessus des pivots.

Exemple

À partir de la matrice précédente, on divise la dernière ligne par 3 :

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Puis, on élimine les valeurs au-dessus du pivot de la 3e colonne :

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3, \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Enfin, éliminons le 1 de la colonne 2, ligne 1 :

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Conclusion : la solution est $x = 0,\ y = 4,\ z = 2$.

Étape 6 : Lire la solution Une fois en forme réduite, il suffit de lire la dernière colonne pour connaître les valeurs des variables correspondantes aux colonnes avec des pivots. Les colonnes sans pivots indiquent des variables libres (paramètres).

Exercices

24. Appliquer la méthode de Gauss pour mettre en forme échelonnée les matrices suivantes :

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 1 & 20 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right]$

25. Appliquer la méthode de Gauss-Jordan pour obtenir la solution du système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 4 \\ 4x + 10y + 6z = 8 \end{cases}$$

4.2 Systèmes d'équations

Tout système d'équations linéaires peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$Ax = b$$

où :

- A est la matrice des coefficients (de taille $m \times n$),
- x est le vecteur colonne des inconnues,
- b est le vecteur colonne des constantes.

Exemple

Système :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 14 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$$

Écriture matricielle :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$Ax = b$$

Méthode de résolution

Pour résoudre un système de type $Ax = b$, on forme la **matrice augmentée** $[A \mid b]$ et on applique l'élimination de Gauss ou de Gauss-Jordan.

Exemple

On reprend l'exemple précédent avec la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

En appliquant la méthode de Gauss-Jordan (voir section 4.1), on obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

La solution est donc :

$$x = 0, \quad y = 4, \quad z = 2$$

Existence et unicité des solutions

On peut déterminer la nature des solutions en étudiant la matrice augmentée :

Un système d'équations linéaires peut avoir :

1. **Aucune solution**, lorsqu'une ligne a des zéros à gauche et un terme non nul à droite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

2. **Une unique solution**, lorsqu'il y a autant de pivots que de variables :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

3. **Une infinité de solutions**, lorsqu'il y a moins de pivots que de variables :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{avec une variable libre}$$

Exemple

Soit le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Sa matrice augmentée est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Réduction :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

On obtient une infinité de solutions : c'est un plan dans $\mathbb{R}^3$.

Exercices

26. Résoudre le système suivant :

$$x + y + z - t = 2$$
$$x - z + s + t = 3$$
$$y + z - s + t = 1$$

27. Identifiez les valeurs de k pour lesquelles le système suivant admet :

(a) une solution unique ;

(b) une infinité de solutions ;

(c) aucune solution.

$$\begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ -2x + 3y + kz &= -1 \\ x + ky + kz &= 5 \end{aligned}$$

28. Identifiez les valeurs de k pour lesquelles le système suivant admet :

(a) une solution unique ;

(b) une infinité de solutions ;

(c) aucune solution.

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + y + kz &= 2 \\ kx + 2y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

4.3 Interprétation géométrique d'un système linéaire

Dans les espaces usuels, les équations linéaires peuvent être vues comme des objets géométriques :

— En $\mathbb{R}^2$, chaque équation représente une **droite**.

— En $\mathbb{R}^3$, chaque équation représente un **plan**.

Les solutions d'un système correspondent à l'**intersection** de ces objets. Ainsi :

— Une solution unique : les objets se croisent en un **point**.

— Aucune solution : les objets sont **parallèles ou incompatibles**.

— Infinité de solutions : les objets se **superposent partiellement ou totalement**.

Cas classiques dans $\mathbb{R}^2$

— Deux droites peuvent se couper en un point : solution unique.

— Être parallèles et distinctes : aucune solution.

— Être confondues : infinité de solutions.

Exemple

Système :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Les deux équations représentent la **même droite**, donc l'ensemble des solutions est infini.

Cas classiques dans $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace, chaque équation définit un **plan**. L'intersection de plusieurs plans peut produire :

- Une **solution unique** : trois plans se croisent en un seul point.
- **Aucune solution** : par exemple, deux plans parallèles et un troisième qui ne les rencontre pas.
- **Une infinité de solutions** :
  - Les trois plans se croisent selon une **droite commune**.
  - Deux plans sont confondus, et le troisième les coupe.
  - Les trois plans sont confondus.

Exemple

Système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations représentent des plans parallèles mais distincts : **aucune solution possible**.

Exercices

29. Donner une interprétation géométrique du système suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

30. En $\mathbb{R}^3$, combien de solutions peut avoir un système de trois équations linéaires à trois inconnues ? Donner un exemple pour chaque cas.

31. Soit le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

— Réduire le système.
— Quelle est sa dimension solution ?
— Donner une interprétation géométrique.

5 Matrice et applications

5.1 Matrices inversibles

Une matrice A est dite **inversible** s'il existe une matrice A^{-1} telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

où I est la matrice identité.

Méthode de calcul de A^{-1}

Pour trouver l'inverse d'une matrice A, on forme la matrice augmentée $[A \mid I]$ et on effectue des opérations élémentaires pour transformer A en I. La matrice obtenue à droite sera alors A^{-1}.

Exemple

Exemple : Trouvons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
On écrit la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

On en déduit :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercices

32. Trouvez l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

33. Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = I$.
— Calculez A^7.
— Démontrez que A est inversible.
— Calculez A^{-1}.

34. Trouvez l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

35. Trouvez l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5.2 Résolution de $Ax = b$

De plus, si une matrice A est inversible, on peut résoudre l'équation matricielle $Ax = b$ par :

$$x = A^{-1}b$$

Exercices

36. Trouvez la solution générale du système :

$$\begin{aligned} -x - 2y - 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= 0 \\ -x - y &= 3 \end{aligned}$$

37. Trouvez la solution générale du système :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y + 2z &= 1 \\ x + 2y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

5.3 Propriétés des matrices inversibles

Voici quelques propriétés importantes des matrices inversibles :

- $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ en général.
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1}$

Exercices

38. Soient A, B et C des matrices carrées inversibles. Démontrez que ABC est inversible.

39. Soient B et C des matrices de dimension $m \times n$ et D une matrice inversible $n \times n$ telle que $(B - C)D = 0$. Démontrez que $B = C$.

5.4 Théorème de caractérisation des matrices inversibles (TCMI)

Étant donné une matrice A de taille $n \times n$, les énoncés suivants sont équivalents : tous sont vrais ou tous sont faux.

1. A est inversible.
2. A admet n pivots.
3. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
4. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.
5. A^T est inversible.
6. $\text{rg}(A) = n$
7. $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$
8. $\ker(A) = \{0\}$
9. A est inversible à gauche : il existe A^{-1} tel que $A^{-1}A = I$
10. A est inversible à droite : il existe A^{-1} tel que $AA^{-1} = I$

5.5 Noyau, image et rang

— Le **noyau** de A est l'ensemble des vecteurs x tels que $Ax = 0$.
— L'**image** de A est l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A.
— Le **rang** de A est la dimension de son image : $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$.

Méthode

Pour trouver le noyau :
— Augmenter A par une colonne de zéros.
— Réduire la matrice par élimination de Gauss.
— Exprimer la solution générale en fonction des variables libres.

Pour trouver l'image :
— Identifier les colonnes de A qui contiennent les pivots après réduction.
— Ces colonnes originales forment une base de $\text{Im}(A)$.

Exercices

40. Déterminez le noyau et l'image de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-elle inversible ?

41. Déterminez le noyau et l'image de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Est-elle inversible ?

42. Déterminez le noyau et l'image de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Est-elle inversible ?

5.6 Matrices Élémentaires

Une **matrice élémentaire** est obtenue en appliquant une unique opération élémentaire de ligne sur la matrice identité. Ces opérations sont :

— $E_{ij(k)}$: ajouter k fois la $j^{\text{ème}}$ ligne à la $i^{\text{ème}}$.

— E_{ij} : échanger les lignes i et j.

— $E_{i(k)}$: multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne par k.

Exemple

Exemples :

$$E_{12(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{3(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplier une matrice A à gauche par une matrice élémentaire E revient à appliquer l'opération correspondante sur A.

Exercices

43. Soit A une matrice 3×3 telle que $E_{23(1)}E_{3\left(\frac{1}{3}\right)}E_{32(-2)}E_{12}A = I$. Démontrez que A est inversible et trouvez la matrice inverse de A.

44. Soit A une matrice 3×3 sur laquelle on fait successivement les opérations élémentaires de ligne (dans l'ordre) suivantes : $L_{2(2)}, L_{23}, L_{32(-1)}, L_{21(2)}$. On obtient ensuite la matrice élémentaire :

$$E_{13(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminez une expression de A comme un produit de matrices élémentaires et déterminez si A est inversible. Si oui, donnez A^{-1} comme un produit de matrices élémentaires.

45. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouvez l'inverse de A et exprimer comme un produit de matrices élémentaires.

6 Exercice de révision

Exercices

46. Démontrez que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

47. Démontrez que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

48. Exprimez A comme un produit de matrices élémentaires.

49. Identifiez les valeurs de k pour que le système d'équations linéaires suivant ait :

(a) une solution,

(b) une infinité de solutions,

(c) aucune solution.

Dans le cas où le système est compatible, donnez la solution générale.

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= k \\ 2x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

50. Soit

$$W = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } u = kv\}$$

avec v un vecteur quelconque. Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$?

51. Soit

$$W = \{X \in \mathbb{M}_{2\times 2} \mid AX = 0,\ \forall A \in \mathbb{M}_{2\times 2}\}$$

Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{M}_{2\times 2}$?

52. Soit

$$W = \{X \in \mathbb{M}_{2\times 2} \mid AX = B,\ \forall A, B \in \mathbb{M}_{2\times 2}\}$$

Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{M}_{2\times 2}$?

53. Soit

$$W = \left\{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid a_0^3 - a_1^3 = 0\right\}$$

Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?

54. Soit

$$W = \left\{(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \mid a_0^2 + 2a_0a_1 + a_1^2 = 0\right\}$$

Est-ce que W est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$?