

Bootcamp Intensif – Algèbre linéaire

Préparation à l'examen final

VACHON VICTOR

Table des matières

1	À qui s'adresse ce bootcamp ?	2
2	Transformations Linéaires et Espaces Associés	2
2.1	Transformations Linéaires	2
2.2	Noyau et Image	3
2.3	Théorème du Rang	5
2.4	Isomorphisme	5
2.5	Représentation Matricielle	6
3	Produits Scalaires et Espaces Euclidiens	9
3.1	Produit Scalaire	9
3.2	Produit scalaire généralisé	10
3.3	Norme	11
3.4	Orthogonalité	11
3.5	Projection Orthogonale	11
3.6	Procédé de Gram-Schmidt	12
4	Valeurs Propres, Vecteurs Propres et Diagonalisation	13
4.1	Valeur propre	13
4.2	Vecteur propre	14
4.3	Polynôme Caractéristique	15
4.4	Diagonalisation	16

1 À qui s'adresse ce bootcamp ?

Ce bootcamp a été conçu pour les étudiants de premier cycle universitaire qui débutent en **Calcul différentiel (Calculus I)** et en **Algèbre linéaire** – des cours fondamentaux suivis par de nombreux étudiants en *mathématiques, physique, informatique, génie* et autres disciplines scientifiques. Ces cours, bien que très abordables sur le plan conceptuel, sont souvent vécus comme difficiles. Non pas à cause de la matière elle-même, mais à cause du **choc de l'entrée à l'université** : nouvelles méthodes de travail, charge de cours importante, autonomie soudaine. . . Résultat : beaucoup d'étudiants comprennent les concepts, mais échouent aux examens. Et souvent, le problème est simple : **manque de pratique indépendante**, sans correction immédiate, sans filet.

Ce **bootcamp** n'est **pas** un cours de théorie. Il n'a pas vocation à remplacer les excellents manuels existants. Il est là pour **entraîner**, comme un programme intensif de révision avant un *midterm* ou un *final*. Chaque PDF est conçu pour représenter **deux jours complets** de travail intensif – idéalement un week-end – avec :

- un rappel **concis** de ce qu'il faut **vraiment connaître** pour réussir l'examen ;
- les **formules essentielles** à maîtriser ;
- et surtout, des **exercices ciblés**, tirés ou inspirés d'anciens examens d'universités variées, pour s'exercer à fond sur chaque notion.

Les présentes notes sont basées sur *Linear Algebra and its Applications* de David Lay pour l'algèbre linéaire, et sur *Calculus : Early Transcendentals (8^e édition)* de James Stewart pour Calculus I. Si vous rencontrez des passages conceptuels qui vous bloquent, je vous recommande vivement de vous référer à ces ouvrages pour approfondir votre compréhension. De plus, la préparation à l'examen final n'est pas un récapitulatif complet du cours. Pour couvrir l'ensemble de la matière, il est essentiel de faire également la préparation à l'examen de mi-session.

Bonne préparation, bon courage. . . et bonne chance !

2 Transformations Linéaires et Espaces Associés

2.1 Transformations Linéaires

Une transformation linéaire est une fonction qui prend en entrée un vecteur et produit un vecteur en sortie. Le vecteur d'entrée et celui de sortie peuvent provenir de deux espaces vectoriels différents. On note

$$T : V \rightarrow W$$

une transformation linéaire T qui prend en entrée un vecteur de l'espace V et retourne un autre vecteur appartenant à W .

Pour prouver qu'une transformation $T : V \rightarrow W$ est linéaire, il suffit de démontrer que :

$$T(c \cdot x + y) = c \cdot T(x) + T(y) \quad \text{pour deux vecteurs arbitraires } x, y \in V$$

Ce calcul revient à vérifier que le fait d'effectuer les deux opérations définies sur les vecteurs (soit la multiplication scalaire et l'addition vectorielle), avant ou après avoir appliqué la transformation, n'a aucun impact sur le résultat. Il n'est pas nécessaire de prouver que $T(0) = 0$.

Exemple

Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(a_0, a_1) = (2a_0 + a_1, a_0).$$

T est-elle linéaire ?

Prenons deux vecteurs arbitraires $x = (a_0, a_1)$ et $y = (b_0, b_1)$ dans $\mathbb{R}^2$, et un scalaire $c \in \mathbb{R}$.

Étape 1 : Calcul de $T(c \cdot x + y)$:

$$c \cdot x + y = c(a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (ca_0 + b_0, ca_1 + b_1)$$

$$T(ca_0 + b_0, ca_1 + b_1) = (2(ca_0 + b_0) + (ca_1 + b_1), ca_0 + b_0)$$

Étape 2 : Calcul de $c \cdot T(x) + T(y)$:

$$T(x) = (2a_0 + a_1, a_0), \quad T(y) = (2b_0 + b_1, b_0)$$

$$\begin{aligned} c \cdot T(x) + T(y) &= c(2a_0 + a_1, a_0) + (2b_0 + b_1, b_0) \\ &= (2ca_0 + ca_1 + 2b_0 + b_1, ca_0 + b_0) \\ &= (2(ca_0 + b_0) + (ca_1 + b_1), ca_0 + b_0) \end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales. Ainsi, T est une transformation linéaire.

Exercices

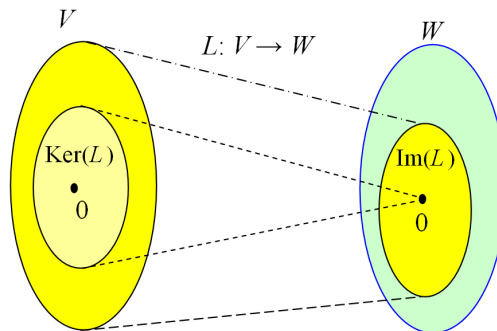
1. Soit $T : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ définie par $T(f(x)) = f'(x)$. T est-elle linéaire ?

2.2 Noyau et Image

Le **noyau** d'une transformation linéaire $T : V \rightarrow W$ est l'ensemble des vecteurs $x \in V$ tels que $T(x) = 0$, où 0 est le vecteur nul de W .

L'**image** d'une transformation linéaire $T : V \rightarrow W$ est le sous-ensemble de W composé des vecteurs y tels qu'il existe $x \in V$ avec $T(x) = y$.

Il est important de comprendre que le noyau de T , noté $\text{Ker}(T)$, est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de V et que l'image de T , notée $\text{Im}(T)$, est un s.e.v. de W .



Exemple

Soit la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$T(a_0, a_1, a_2) = (a_0 - a_1, 2a_2)$$

Étape 1 : Déterminons le noyau $\text{Ker}(T)$.

Cherchons les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $T(x) = (0, 0)$:

$$T(a_0, a_1, a_2) = (a_0 - a_1, 2a_2) = (0, 0)$$

Ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} a_0 - a_1 = 0 \\ 2a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = a_1 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont les vecteurs de la forme $(k, k, 0)$, avec $k \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\text{Ker}(T) = \text{Vect}\{(1, 1, 0)\}$$

Étape 2 : Déterminons l'image $\text{Im}(T)$.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Nous avons :

$$T(1, 0, 0) = (1, 0), \quad T(0, 1, 0) = (-1, 0), \quad T(0, 0, 1) = (0, 2)$$

L'image de T est donc engendrée par ces trois vecteurs :

$$\text{Im}(T) = \text{Vect}\{(1, 0), (-1, 0), (0, 2)\} = \text{Vect}\{(1, 0), (0, 2)\}$$

Ce sont deux vecteurs linéairement indépendants qui engendrent tout $\mathbb{R}^2$. Donc :

$$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$$

Exercices

2. Soit $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow M_{2 \times 2}$ définie par :

$$T(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) - f(2) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}$$

Quelle est la dimension de $\text{Im}(T)$?

2.3 Théorème du Rang

Rappel : la dimension d'un espace vectoriel est tout simplement le nombre de vecteurs qui composent sa base. Nous appelons le *rang* de T la dimension de l'image de T , notée :

$$\text{rang } T = \dim(\text{Im}(T)).$$

Le théorème du rang stipule que pour une transformation linéaire $T : V \rightarrow W$:

$$\dim(\text{Ker}(T)) + \text{rang } T = \dim(V).$$

De ce fait, nous pouvons déduire que la dimension de $\text{Ker}(T)$ à l'exercice 2 est en fait 1 puisque $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ et $\text{rang } T = 2$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{P}_2) &= \dim(\text{Ker}(T)) + \text{rang } T \\ 3 &= \dim(\text{Ker}(T)) + 2 \implies \dim(\text{Ker}(T)) = 1.\end{aligned}$$

Le lecteur est invité à vérifier que $\text{Ker}(T) = \text{Vect}\{x^2 - 3x\} \implies \dim(\text{Ker}(T)) = 1$.

2.4 Isomorphisme

Une transformation linéaire $T : V \rightarrow W$ est *surjective* si $\text{Im}(T) = W$.

Une transformation linéaire $T : V \rightarrow W$ est *injective* si $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$.

Une transformation linéaire est un *isomorphisme* si elle est injective et surjective. Si V et W sont de même dimension, les énoncés suivants sont équivalents :

1. T est surjective.

2. T est injective.

3. $\text{rang } T = \dim(V)$.

Exercices

3. Pour les transformations linéaires suivantes, prouvez que T est une transformation linéaire, trouvez des bases pour $\text{Ker}(T)$ et $\text{Im}(T)$, et vérifiez le théorème du rang. Est-ce que T est surjectif? Injectif? Un isomorphisme?

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(a_0, a_1) = (a_0 + a_1, 0, 2a_0 - a_1)$

(b) $T : \mathbb{M}_{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2}$, $T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $T : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_2$, $T(f(x)) = x \cdot f(x) + f'(x)$

2.5 Représentation Matricielle

Pour obtenir la représentation matricielle d'une transformation linéaire $T : V \rightarrow W$, où B est une base de V et C une base de W , nous construisons une matrice où chaque colonne correspond à la représentation de T appliqué à chaque vecteur de B , exprimée dans la base C .

Ainsi, pour tout vecteur $v \in V$, on a :

$$[T(v)]_C = [T]_{C \leftarrow B} \cdot [v]_B.$$

Exemple

Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(a_0, a_1) = (a_0 + 3a_1, 0, 2a_0 - 4a_1)$. Quelle est la représentation matricielle de T dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$?

Nous calculons les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$T((1, 0)) = (1, 0, 2), \quad T((0, 1)) = (3, 0, -4).$$

Ces vecteurs sont placés en colonnes dans la matrice $[T]_{C \leftarrow B}$:

$$[T]_{C \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Nous vérifions le résultat avec un exemple :

$$[T(2, 1)]_C = [T]_{C \leftarrow B} \cdot [(2, 1)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui est bien le résultat attendu car :

$$T(2, 1) = (2 + 3 \cdot 1, 0, 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1) = (5, 0, 0).$$

Exercices

4. Pour les transformations linéaires $T : V \rightarrow W$ suivantes où B est la base canonique de V et C celle de W , calculez $[T]_{C \leftarrow B}$.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(a_0, a_1) = (2a_0 - a_1, 3a_0 + 4a_1, a_0)$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(a_0, a_1, a_2) = (2a_0 + 3a_1 - a_2, a_0 + a_2)$

(c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(a_0, a_1, a_2) = 2a_0 + a_1 - 3a_2$

5. Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(a_0, a_1) = (a_0 - a_1, a_0, 2a_0 + a_1)$. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculez $[T]_{C \leftarrow B}$ si

$$C = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 2, 3)\}.$$

Si $A = \{(1, 2), (2, 3)\}$, quel est $[T]_{C \leftarrow A}$?

6. oit $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2}$ définie par :

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p'(0) & p''(0) \end{pmatrix}$$

(a) Montrez que T est linéaire.

(b) Donnez la dimension du noyau de T et déterminez une base de l'image de T .

(c) T est-elle injective ? Surjective ?

(d) Trouvez la représentation matricielle $[T]_{C \leftarrow B}$ où B et C sont les bases canoniques de $\mathbb{P}_2$ et $\mathbb{M}_{2 \times 2}$.

(e) Calculez $T(2x^2 + 4x - 10)$ à l'aide de $[T]_{C \leftarrow B}$.

(f) Montrez que $A = \{1, x - x^2, 2 - x^2\}$ est une base de $\mathbb{P}_2$.

(g) Trouvez $[T]_{C \leftarrow A}$.

7. Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(a_0, a_1, a_2) = (a_0 + a_1, -2a_0 + a_1 - a_2)$.

— Calculez $[T]_{C \leftarrow B}$

— En déduire une base et une dimension de $\ker(T)$ et de $\text{Im}(T)$.

— Est-ce un isomorphisme ?

8. Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(a_0, a_1, a_2) = (a_0 + a_2, a_0 + a_1 + 2a_2, 2a_0 + a_1 + 3a_2)$.

— Calculez $[T]_{C \leftarrow B}$

— En déduire une base et une dimension de $\ker(T)$ et $\text{Im}(T)$.

— Est-ce un isomorphisme ?

9. Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x) = Ax$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouvez une base et une dimension de $\ker(T)$ et de $\text{Im}(T)$. Est-ce un isomorphisme ?

10. Soit $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ définie par :

$$T(p(x)) = p(x) + 2p'(x)$$

(a) Trouvez la représentation matricielle $[T]_{B \leftarrow B}$ dans la base canonique $\{1, x, x^2\}$.

(b) Calculez $T(1+x)$ en utilisant la matrice obtenue en (a).

(c) Soit la base $C = \{1-x, x+x^2, 1-x^2\}$. Trouvez la matrice de passage $P_{C \leftarrow B}$ et calculez $[1-x+3x^2]_C$ à l'aide de celle-ci.

(d) Trouvez $[T]_{C \leftarrow C}$ à partir des résultats de (a) et (c).

(e) Est-ce que T est un isomorphisme ? Justifiez.

11. Soit $T : \mathbb{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{P}_2$ définie par :

$$T \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right) = (a_{11} + a_{12}) + (a_{12} + a_{21})x + (a_{21} + a_{22})x^2$$

(a) Montrez que T est linéaire.

(b) Donnez la dimension du noyau et de l'image de T . Est-ce que T est un isomorphisme ?

(c) Trouvez la représentation matricielle $[T]_{C \leftarrow B}$, où B et C sont les bases canoniques de $\mathbb{M}_{2 \times 2}$ et $\mathbb{P}_2$.

(d) Calculez $T \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$ en utilisant le résultat obtenu en (c).

(e) Soit la base $C' = \{1-x, x-x^2, 2-x^2\}$. Trouvez la matrice de passage $P_{C' \leftarrow C}$ et calculez $[1+2x-4x^2]_{C'}$.

(f) En utilisant (c) et (e), trouvez $[T]_{C' \leftarrow B}$.

12. Soit $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ définie par :

$$T(p(x)) = p(x) + xp''(x) - \int_0^1 p(x) dx$$

- (a) Montrez que T est linéaire.
- (b) Trouvez la représentation matricielle $[T]_{B \leftarrow B}$, où $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.
- (c) Exprimez $T(3x^2 - 4x^3)$ dans la base B .
- (d) Trouvez le noyau de T et $\text{Im}(T)$. Est-ce que T est un isomorphisme ?

3 Produits Scalaires et Espaces Euclidiens

3.1 Produit Scalaire

Le produit scalaire entre deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ est un nombre réel $s \in \mathbb{R}$ défini par :

$$s = u \cdot v = u^T v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{k=1}^n u_k v_k$$

Propriétés du produit scalaire

Le produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :

- 1. $u \cdot v = v \cdot u$ (Commutativité)
- 2. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ (Distributivité)
- 3. $(cu) \cdot v = u \cdot (cv) = c(u \cdot v)$ (Homogénéité)
- 4. $u \cdot u \geq 0$ et $u \cdot u = 0 \iff u = 0$ (Positivité définie)

Exemple

Calculez $(-1, 3, 2) \cdot (2, -2, 1)$

$$\begin{aligned} (-1, 3, 2) \cdot (2, -2, 1) &= -1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ &= -2 - 6 + 2 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Exercices

13. Soient $u = (-1, 7, -5)$ et $v = (3, 2, -1)$. Calculez :

(a) $u \cdot v$

(b) $v \cdot v$

(c) $\frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$

3.2 Produit scalaire généralisé

Le produit scalaire peut être généralisé à d'autres espaces vectoriels que $\mathbb{R}^n$. Dans ces cas, on note le produit scalaire $\langle u, v \rangle$.

Par exemple, pour des polynômes $f, g \in \mathbb{P}^n$, on peut définir :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

Conditions pour être un produit scalaire

Pour que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soit un produit scalaire sur un espace vectoriel V , les propriétés suivantes doivent être satisfaites :

- **Symétrie** : $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- **Linéarité à gauche** : $\langle cu + v, w \rangle = c\langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- **Positivité** : $\langle u, u \rangle \geq 0$, et $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

Exemple

Démontrez que $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{P}_n$

Symétrie :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b g(x)f(x) dx = \langle g, f \rangle$$

Linéarité :

$$\begin{aligned} \langle cf + g, h \rangle &= \int_a^b (cf(x) + g(x))h(x) dx \\ &= \int_a^b cf(x)h(x) dx + \int_a^b g(x)h(x) dx \\ &= c \int_a^b f(x)h(x) dx + \int_a^b g(x)h(x) dx \\ &= c\langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

Positivité :

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 dx \geq 0$$

Et $\langle f, f \rangle = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$ presque partout sur $[a, b]$.

Exercices

14. Démontrez que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{M}_{n \times m}$.

3.3 Norme

La norme d'un vecteur est essentiellement sa longueur. Elle est définie par :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Dans le cas d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, nous avons :

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Exercices

15. Pour chacun des vecteurs u suivants, déterminez $\|u\|$:

- $u = (3, 4)$
- $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, muni du produit scalaire défini à l'exercice 2.

3.4 Orthogonalité

Deux vecteurs u, v sont orthogonaux si $u \cdot v = 0$. Par exemple, $(-1, 2, 0)$ et $(4, 2, 0)$ sont orthogonaux puisque :

$$(-1, 2, 0) \cdot (4, 2, 0) = -4 + 4 + 0 = 0$$

Soit W un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Le sous-espace orthogonal $W^\perp$ est défini comme suit :

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall w \in W, v \cdot w = 0\}$$

Exercices

16. Soit $W = \{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$. Trouvez une base de $W^\perp$.

3.5 Projection Orthogonale

La projection orthogonale de u sur v est le vecteur $\hat{u}$ défini par :

$$\hat{u} = \text{proj}_v u = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$$

Exercices

17. Calculez $\text{proj}_v u$ où $u = (1, 0, -3)$ et $v = (1, 2, -1)$.

Nous pouvons calculer la projection orthogonale $\hat{u}$ d'un vecteur u sur un sous-espace vectoriel V de la façon suivante, si la base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une base orthogonale :

$$\hat{u} = \text{proj}_{v_1} u + \text{proj}_{v_2} u + \dots + \text{proj}_{v_n} u$$

Une base orthogonale est une base dans laquelle tous les vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Une base orthonormale est une base orthogonale composée de vecteurs unitaires.

Exercices

18. Soient $u = (-1, 4, 3)$, $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (-1, 1, 0)$. Calculez la projection orthogonale de u sur $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$.

3.6 Procédé de Gram-Schmidt

Soit $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une base d'un espace vectoriel. Une base orthogonale $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ peut être obtenue à partir de B via le procédé de Gram-Schmidt :

$$\begin{aligned}v_1 &= u_1 \\v_2 &= u_2 - \text{proj}_{v_1} u_2 \\v_3 &= u_3 - \text{proj}_{\text{Vect}(v_1, v_2)} u_3 \\v_4 &= u_4 - \text{proj}_{\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)} u_4 \\&\vdots \\v_n &= u_n - \text{proj}_{\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})} u_n\end{aligned}$$

Exercices

19. Soit $B = \{(3, -4, 5), (-3, 14, -7)\}$ une base de V . Trouvez une base orthogonale de V à partir de B .
20. Soit l'espace vectoriel $\mathbb{P}_2$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ et la base $B = \{1, 2x - 1, 12x^2\}$. Trouvez une base orthogonale de $\mathbb{P}_2$ à partir de B .

21. Soit la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \langle U, V \rangle_Q = U^\top QV$$

- (a) Montrez que $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
- (b) Trouvez une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à ce produit scalaire.
22. Soit l'espace vectoriel $\mathbb{M}_{2 \times 2}$ muni du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^\top A)$ et $W = \{A \in \mathbb{M}_{2 \times 2} \mid A^\top = -A\}$.
- (a) Montrez que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2 \times 2}$.
- (b) Montrez que $W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- (c) Trouvez une base de $W^\perp$.
- (d) Montrez que cette base est orthogonale.
- (e) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouvez la projection de M sur $W^\perp$.

23. Soit $\mathbb{P}_2$ muni du produit scalaire

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

- (a) Montrez que $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 \mid \int_0^1 p(x)dx = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_2$.
- (b) Montrez que $B = \{p(x) = 2x - 1, q(x) = 3x^2 - 1\}$ est une base de W .
- (c) Est-ce que B est une base orthogonale ?
- (d) Calculez $\text{proj}_{p(x)} x$ et $\text{proj}_{q(x)} x$.
- (e) Expliquez pourquoi $\text{proj}_W x \neq \text{proj}_{p(x)} x + \text{proj}_{q(x)} x$.

24. On munit $\mathbb{M}_{2 \times 2}$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^\top A)$.

- (a) Montrez que $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2 \times 2}$.
- (b) Trouvez une base orthogonale de W .
- (c) Calculez $\text{proj}_W B$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

25. Soit le produit scalaire $\langle u, v \rangle = (Au) \cdot (Av)$, où A est une matrice inversible.

- (a) Montrez que si $\langle u, u \rangle = 0$, alors $u = 0$.
- (b) Montrez que $B = \{(-1, 1, 0), (2, 3, -5)\}$ est une base du sous-espace

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Montrez que $(1, 3, -1) \in W^\perp$. En déduire une base de $W^\perp$.

4 Valeurs Propres, Vecteurs Propres et Diagonalisation

4.1 Valeur propre

Soit A une matrice carrée $n \times n$. Le scalaire λ est une **valeur propre** de A si l'équation

$$Au = \lambda u$$

admet au moins une solution $u \neq 0$. La solution $u = 0$ est appelée la solution triviale. Une autre forme de cette équation, plus souvent utilisée, est :

$$(A - \lambda I)u = 0$$

Exemple

Déterminez si $\lambda = 2$ est une valeur propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Nous voulons vérifier s'il existe une solution non triviale à :

$$(A - 2I)u = 0$$

Calculons :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Puisque les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendantes, le système $(A - 2I)u = 0$ possède une solution non triviale. Donc, $\lambda = 2$ est une valeur propre de A .

Exercices

26. Déterminez si $\lambda = -2$ est une valeur propre de

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

4.2 Vecteur propre

Un **vecteur propre** (ou *vecteur caractéristique*) associé à une **valeur propre** λ d'une matrice A est un vecteur non nul u tel que :

$$Au = \lambda u$$

Autrement dit, l'action de la matrice A sur ce vecteur se résume à le *multiplier par un scalaire* λ . Le vecteur u ne change donc **pas de direction**, seulement de norme (et éventuellement de sens). L'ensemble des vecteurs propres associés à une même valeur propre, ainsi que le vecteur nul, forme un **sous-espace vectoriel**, appelé *espace propre*.

Exemple

Soient la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont-ils des vecteurs propres de A ?

Calculons :

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -4u$$

Donc u est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = -4$.

Par contre :

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Il n'existe aucun scalaire λ tel que

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc v n'est pas un vecteur propre de A .

Exercices

27. Déterminez si

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

4.3 Polynôme Caractéristique

Soit A une matrice carrée $n \times n$. Le polynôme caractéristique de A est le polynôme en λ de degré n , défini par :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

où I est la matrice identité de taille $n \times n$.

Le polynôme caractéristique est utilisé pour déterminer les valeurs propres de A . Un scalaire λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$.

La **multiplicité algébrique** d'une valeur propre λ est sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique (son exposant).

Exercices

28. Déterminez le polynôme caractéristique, les valeurs propres et leur multiplicité de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

29. Déterminez le polynôme caractéristique, les valeurs propres et leur multiplicité de

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.4 Diagonalisation

Une matrice A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale D , c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

Dans le cas particulier d'une matrice **symétrique**, la similarité devient une orthogonalité :

$$A = PDP^T$$

Voici la procédure pour diagonaliser une matrice symétrique A de taille $n \times n$:

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A .
2. Trouver les valeurs propres de A (racines du polynôme caractéristique).
3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée des vecteurs propres.
4. Construire la matrice P .
5. Construire la matrice D .

Exercices

30. Diagonalisez la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

31. Diagonalisez la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -6 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

32. Diagonalisez la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

33. Diagonalisez la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 8 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

34. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrez que $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A . En déduire la valeur propre associée.
- (b) Déterminez le polynôme caractéristique, ainsi que toutes les valeurs propres et une base des vecteurs propres de A .
- (c) Trouvez une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Vérifiez les calculs par multiplication matricielle explicite.

35. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrez que $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$.
- (b) Trouvez les valeurs propres de A avec leurs multiplicités.
- (c) Déterminez une base pour chacun des espaces propres de A .
- (d) Diagonalisez la matrice A avec une matrice orthogonale.

36. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Trouvez toutes les valeurs propres de A .
- (b) Trouvez une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^T$.
- (c) Calculez A^{11} .

37. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et le vecteur} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculez Av et en déduire une valeur propre de A .
- (b) Montrez que l'autre valeur propre de A est -2 .
- (c) Trouvez une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^T$.

38. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 3 & 2 & 1 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (a) Montrez que A admet la valeur propre 1 pour toute valeur de α .
- (b) Trouvez toutes les valeurs possibles de α pour lesquelles la matrice A admet la valeur propre 0.
- (c) La matrice A est-elle diagonalisable pour $\alpha = 2$?