Analyse de Fourier

Victor Vachon

Table des matières

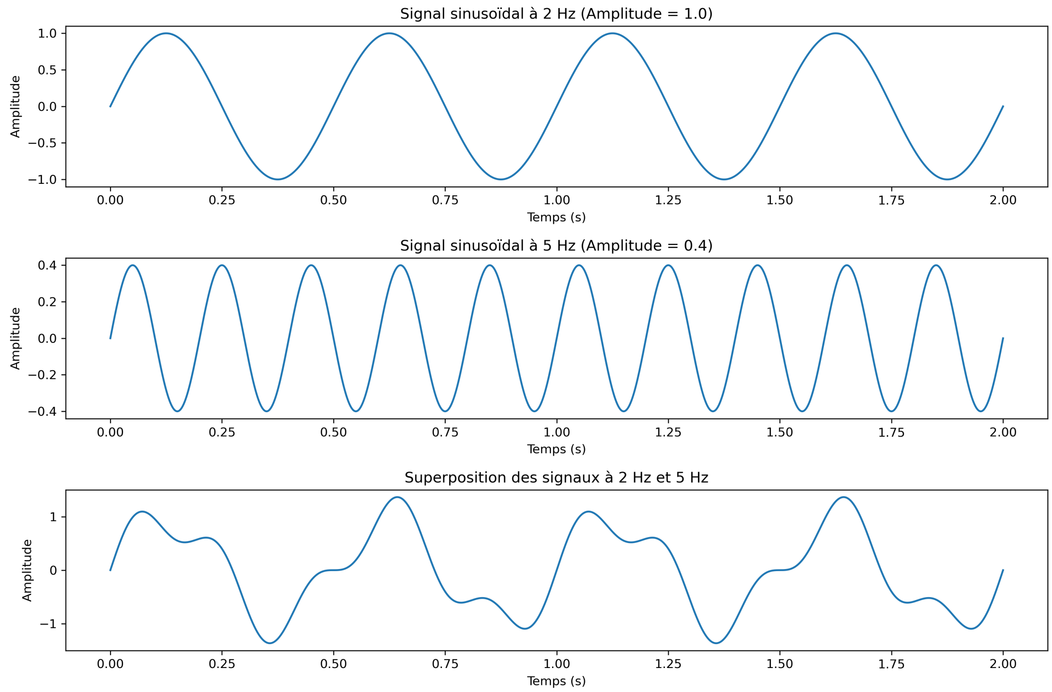
1 Introduction

Au fil de mes études, j'ai constaté que de nombreux étudiants utilisent la transformée de Fourier régulièrement, sans toujours comprendre en profondeur ce qu'elle représente, ni pourquoi l'on passe parfois du domaine temporel au domaine fréquentiel. C'est ce constat qui m'a motivé à rédiger cette note, aussi simple et intuitive que possible, afin de clarifier les fondements de cette transformée incontournable.

Commençons par une notion essentielle : la fréquence ω. Elle indique combien de fois un événement (comme une oscillation, un battement de cœur, ou toute autre variation périodique) se produit par unité de temps. Elle s'exprime en Hertz (Hz), c'est-à-dire en cycles par seconde. La transformée de Fourier répond à une question fondamentale :

« Quelles sont les fréquences présentes dans une fonction ou un signal ? »

Elle agit comme un outil capable d'identifier les motifs périodiques cachés dans un signal, même lorsque ceux-ci sont entremêlés, masqués ou peu visibles à l'œil nu. Prenons un exemple concret : supposons deux signaux simples, le premier oscille à 2 Hz, c'est-à-dire qu'il effectue 2 oscillations par seconde ; le second oscille à 5 Hz. Voici les graphiques de ces deux signaux, ainsi que celui de leur superposition :



À l'œil nu, le signal combiné semble complexe et il est difficile d'y deviner directement qu'il est composé uniquement de deux ondes simples. C'est un peu comme observer un mélange de couleurs et essayer d'en déduire les couleurs primaires qui ont servi à le créer, ainsi que leurs proportions. Être capable de décomposer un signal en ses composantes fondamentales serait pourtant très utile dans de nombreux contextes. Par exemple, en traitement audio, si une note aiguë indésirable est présente dans un enregistrement, il serait possible de l'identifier rapidement en analysant le signal dans le domaine fréquentiel, puis de la supprimer ou de l'atténuer.

C'est précisément là que la transformée de Fourier intervient. Elle nous permet de décomposer un signal complexe en une somme de fréquences élémentaires, de la même manière que l'on pourrait décomposer un son complexe en une superposition de notes pures.

Il est donc crucial de bien comprendre le lien entre les deux représentations d'un signal : le domaine temporel et le domaine fréquentiel. La transformée de Fourier constitue le pont entre ces deux :

— Dans le **domaine temporel**, $f(t)$ décrit comment un signal évolue au cours du temps.
— Dans le **domaine fréquentiel**, $F(\omega)$ décrit la contribution de chaque fréquence ω au signal. En général, $F(\omega)$ est une fonction complexe : son module représente l'amplitude de cette fréquence, et sa phase correspond à son décalage temporel.

2 Changement de base

Nous venons d'introduire les domaines temporel et fréquentiel, liés par la transformée de Fourier. Ce passage d'une représentation à l'autre correspond en réalité à un **changement de base**.
En algèbre linéaire classique, un vecteur $\vec{v}$ dans un espace vectoriel peut être exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs d'une base :

$$\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n$$

Si l'on change de base, on décrit les mêmes vecteurs avec d'autres coefficients. Nous allons maintenant effectuer un saut conceptuel en étendant cette idée aux fonctions : *on peut considérer les fonctions comme des vecteurs dans un espace vectoriel de dimension infinie.*

Par exemple, une fonction $f(t)$ définie sur un intervalle (ou sur tout $\mathbb{R}$) peut être exprimée comme une somme (ou une intégrale) de fonctions de base $\phi_n(t)$:

$$f(t) = \sum_n c_n \cdot \phi_n(t)$$

Les $\phi_n(t)$ jouent ici le rôle des vecteurs de base $\vec{e}_i$, et les coefficients c_n représentent les composantes de f dans cette base. Les étudiant en physique rencontre ce type de décomposition fréquemment, par exemple en mécanique quantique avec les états propres d'un opérateur.

3 Série de Fourier

C'est sur cette idée que repose la **série de Fourier**. Sur un intervalle de longueur P, typiquement choisi comme $\left[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right]$, on considère la famille suivante de fonctions :

$$\left\{1, \cos\left(\frac{2\pi n}{P}t\right), \sin\left(\frac{2\pi n}{P}t\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Cette famille forme une **base orthogonale** dans l'espace des fonctions de carré intégrable $L^2\left(\left[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right]\right)$, relativement au produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(t)\, g(t)\, dt$$

Elle est non seulement orthogonale, mais aussi **complète** : il n'existe aucune fonction non nulle dans $L^2\left(\left[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right]\right)$ qui soit orthogonale à tous ses éléments. Cela signifie que toute fonction périodique de période P, appartenant à L^2, peut être représentée par une série de Fourier construite à partir de cette base comme ceci :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{P}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{P}t\right)\right), \quad t \in [0, P]$$

De la même façon qu'en géométrie dans l'espace on écrit :

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

on peut ici écrire :

$$f(t) = \sum (\text{composantes}) \times (\text{vecteurs de base})$$

où les « vecteurs de base » sont $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$, et les composantes sont les coefficients de Fourier a_n, b_n.

Il est important de noter que l'**orthogonalité** n'est pas indispensable pour qu'un ensemble forme une base mais la **complétude**, elle, l'est : sans elle, certaines fonctions ne pourraient pas être représentées dans la base choisie.

Dans le cas de la série de Fourier, l'orthogonalité des sinusoïdes simplifie considérablement les calculs, en rendant chaque coefficient indépendant des autres. Les coefficients sont donnés par les formules suivantes :

$$a_n = \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{P}t\right)dt, \quad b_n = \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{P}t\right)dt$$

Et pour a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(t)dt$$

Ces formules découlent directement du fait que les fonctions trigonométriques sont orthogonales sur un intervalle de longueur P, en particulier sur $\left[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right]$. On a notamment :

$$\int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \cos\left(\frac{2\pi n}{P}t\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{P}t\right)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{P}{2} & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \sin\left(\frac{2\pi n}{P}t\right)\sin\left(\frac{2\pi m}{P}t\right)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{P}{2} & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \cos\left(\frac{2\pi n}{P}t\right)\sin\left(\frac{2\pi m}{P}t\right)dt = 0 \quad \text{pour tous } n, m \in \mathbb{N}^*$$

Grâce à cette orthogonalité, on peut **projeter** f sur chaque sinusoïde séparément, comme on projette un vecteur sur $\vec{i}, \vec{j}$, etc. Cela permet d'isoler chaque composante fréquentielle. C'est précisément ainsi que la série de Fourier extrait les fréquences d'un signal périodique, c'est ce qui fait sa spécificité.

Autrement dit, pour déterminer si une fréquence particulière est présente dans un signal périodique, on multiplie ce signal par une sinusoïde pure de cette fréquence, puis on intègre sur une période complète. Deux cas se présentent :

Si la fréquence testée est effectivement présente dans le signal, le produit contiendra une composante constante : l'intégrale sera non nulle, et sa valeur indiquera à quel point cette fréquence contribue au signal $\rightarrow$ plus la fréquence est présente fortement, plus la valeur du coefficient associé (a_n ou b_n) sera grande. En revanche, si cette fréquence est absente, le produit oscillera uniformément autour de zéro, ce qui donnera une intégrale nulle.

A ce point, une question légitime serait de se demander pourquoi projeter à la fois sur cos et sin, et pas seulement sur l'un des deux ?

Lorsqu'on décompose un signal périodique, il ne suffit pas de savoir qu'une fréquence est présente, il faut aussi savoir avec quel décalage temporel elle intervient dans le signal. Ce décalage est ce qu'on appelle la phase. Les fonctions $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ ont la même fréquence, mais sont décalées dans le temps (elles sont en quadrature de phase : décalées d'un quart de période). Cela signifie que toute sinusoïde de fréquence donnée peut être vue comme une combinaison de $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$, avec des poids différents selon son amplitude et sa phase.

Par exemple, une onde $A\cos(\omega t + \phi)$ peut toujours être réécrite comme :

$$A\cos(\omega t + \phi) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

où $a = A\cos(\phi)$ et $b = -A\sin(\phi)$.

Ainsi :

— a encode l'amplitude projetée sur le cosinus,
— b encode l'amplitude projetée sur le sinus,
— et ensemble, ils permettent de retrouver l'amplitude globale $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et la phase $\phi = -\arctan(b/a)$.

Si l'on utilisait seulement cos, on ne pourrait pas distinguer deux ondes de même fréquence mais déphasées : on perdrait l'information temporelle.

C'est pourquoi la série de Fourier projette systématiquement sur les deux composantes $\cos(n\omega_0 t)$ et $\sin(n\omega_0 t)$ pour chaque fréquence n et permet ainsi de capturer toute l'information de chaque fréquence présente dans le signal, à la fois son amplitude et sa phase.

Variabilité des formes de la série de Fourier : conventions et contextes

Il est important de souligner qu'il n'existe pas une unique façon d'écrire la série de Fourier. Plusieurs formes coexistent dans la littérature, et ces différences tiennent à divers choix de conventions, de domaines d'intégration, ou encore de normalisation des coefficients.

La série de Fourier représente une fonction périodique sur un intervalle de longueur P, mais l'intervalle de travail peut être choisi de diverses manières, pour des raisons pratiques ou de symétrie. Par exemple : $[0, P]$, $[-P/2, P/2]$, $[-\pi, \pi]$, $[0, 2\pi]$

Chaque intervalle est valide du moment qu'il couvre une période complète de la fonction. Toutefois, les bornes ont un impact sur les formules d'orthogonalité et donc sur les expressions explicites des coefficients de Fourier. Il est donc crucial d'adapter les formules à l'intervalle choisi. De plus, des conventions sur les constantes ou des manipulation algébrique peuvent affecter la forme des formules $\rightarrow$ prudence.

4 Autre décomposition

La base $\left\{1, \cos\left(\frac{2\pi n}{P}t\right), \sin\left(\frac{2\pi n}{P}t\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ n'est pas la seule possible. En physique ou en mathématiques, on rencontre aussi d'autres familles de fonctions de base, comme les polynômes de Legendre, les polynômes de Hermite, ou les ondelettes, selon les besoins du problème.

De plus, la plupart des gens ont sans doute déjà rencontré une autre forme de décomposition fonctionnelle : la **série de Taylor**, qui exprime une fonction $f(x)$ comme une combinaison linéaire de puissances de x, centrée autour d'un point x_0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

C'est une décomposition sur la base $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$. La comparaison entre Taylor et Fourier est instructive :
— La série de Taylor décompose une fonction selon son **comportement local** autour d'un point.
— La série de Fourier décompose une fonction selon ses **composantes oscillatoires globales**.

Dans les deux cas, on projette une fonction sur une base, mais la base de Fourier est **orthogonale**, **périodique** et **globale**, celle de Taylor est **locale**, **non orthogonale**, et centrée autour d'un point donné.

Un point crucial à retenir : la série de Fourier ne peut représenter que des fonctions périodiques. Pourquoi ? Parce que toutes les fonctions de la base (sinus et cosinus) sont périodiques. Or, une fonction ne peut être représentée que par des combinaisons d'éléments de la base. Si ces éléments sont tous périodiques, alors la somme le sera aussi.

Autrement dit, si l'on applique une série de Fourier à une fonction non périodique définie sur un intervalle (par exemple $[0, T]$), la série construira une fonction périodique, qui coïncide avec $f(t)$ sur cet intervalle, puis qui se répète indéfiniment en dehors. Cette répétition est inérente à la série de Fourier.

5 Développement de la transformée de Fourier

Nous avons vu que la **série de Fourier** permet de décomposer une fonction périodique comme une somme de sinusoïdes. En version complexe, cette série peut s'écrire :

$$f(t) = \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\omega_n t}, \quad \text{avec} \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{P}$$

Les coefficients c_n s'obtiennent par projection sur les exponentielles complexes :

$$c_n = \int_{-P/2}^{P/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Démonstration

On part de la forme :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{P} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{P} t\right) \right]$$

Les identités d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

permettent une réécriture de la série trigonométrique en remplaçant les sinus et cosinus :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i} \right], \quad \text{avec } \omega_n = \frac{2\pi n}{P}$$

développons :

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{i\omega_n t} + \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{-i\omega_n t} \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\omega_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} e^{-i\omega_n t} \end{aligned}$$

avec les notations :

$$A_n = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}, \quad A_{-n} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}$$

On peut maintenant regrouper tous les termes exponentiels dans une seule somme indexée sur $\mathbb{Z}$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}$$

avec :

- $c_0 = a_0$
- $c_n = A_n$ pour $n > 0$
- $c_n = A_n$ pour $n < 0$ (on redéfinit A_{-n} comme c_n)
- $\omega_n = \frac{2\pi n}{P}$

La forme précédente correspond à la série de Fourier complexe, mais elle est souvent écrite avec un facteur $\frac{1}{P}$ devant, si l'on choisit les coefficients c_n avec la convention :

$$c_n = \int_{-P/2}^{P/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

alors la reconstruction se fait par :

$$f(t) = \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\omega_n t}$$

Cette normalisation vient du fait qu'on impose une orthogonalité sur l'intervalle $[0, P]$ avec :

$$\int_{-P/2}^{P/2} e^{i\omega_n t} \cdot e^{-i\omega_m t} \, dt = P \cdot \delta_{n,m}$$

On peut légèrement remanier l'expression comme ceci :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\omega_n t} \, \Delta\omega$$

où $\Delta\omega = \frac{2\pi}{P}$ représente l'écart entre les fréquences discrètes de la série.

La série de Fourier est donc un outil parfaitement adapté pour analyser les fonctions périodiques, c'est-à-dire les fonctions définies sur un intervalle de longueur P, que l'on prolonge par répétition à l'infini.

Cependant, si la fonction n'est pas périodique, deux possibilités s'offrent à nous :

- soit on la prolonge artificiellement par périodisation, mais cela introduit généralement des discontinuités.
- soit on passe à une généralisation : la transformée de Fourier, qui permet d'analyser les fréquences d'une fonction non périodique, en utilisant un spectre continu.

Passage à la transformée de Fourier

Mathématiquement, le passage de la série à la transformée se fait en faisant tendre la période

$P \to \infty$. Dans cette limite, l'écart entre les fréquences devient infiniment petit : $\Delta\omega \to d\omega$, et la somme devient une intégrale [1] :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

où $C(\omega)$ est donné par :

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Cette paire de formules constitue la transformée de Fourier et son inverse. On utilise souvent une version symétriquement normalisée :

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Ici, $F(\omega)$ représente la transformée de Fourier directe, et $f(t)$ la reconstruction inverse. Cette transformée permet donc d'**analyser la distribution continue des fréquences** contenues dans un signal non périodique, de la même manière que la série de Fourier le fait pour les signaux périodiques.

Décryptons chaque terme de la formule :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

1. $f(t)$ est le signal à analyser, défini dans le temps.

2. $e^{-i\omega t}$ est une onde complexe de fréquence ω, ette forme est puissante car comme $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ et donc la combinaison sin/cos capture à la fois l'amplitude et la phase d'une onde.

3. Le produit $f(t) \cdot e^{-i\omega t}$ mesure à quel point $f(t)$ "ressemble" à une onde de fréquence ω. C'est une sorte de corrélation entre le signal et une sinusoïde de fréquence ω.

4. L'intégrale fait la somme sur tous les temps, ce qui permet de détecter des motifs répétés sur toute la durée du signal.

C'est ainsi que, pour chaque fréquence ω, la transformée de Fourier permet de déterminer si cette fréquence est présente dans le signal, et d'établir une distribution sur l'ensemble des fréquences.

Finalement, pour celles et ceux qui souhaitent approfondir leur intuition de manière visuelle et interactive, je recommande vivement la vidéo suivante de la chaîne *3Blue1Brown*, qui illustre magnifiquement le fonctionnement de la transformée de Fourier à l'aide d'animations géométriques :

`https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY`

1. Ce développement nécessite normalement une rigueur mathématique via la définition de l'intégrale de Riemann.

6 Transformée de Fourier rapide (FFT)

Nous avons vu que la transformée de Fourier permet de décomposer un signal en ses composantes fréquentielles. Cependant en pratique, pour un signal numérique, c'est-à-dire un ensemble de valeurs discrètes $f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}$, notamment lorsqu'on analysé des données numériquement, on utilise une version discrète de la transformée : la **transformée de Fourier discrète (DFT)**.

La DFT d'un signal de N points est définie par :

$$g_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, e^{-2\pi i \frac{jk}{N}}, \quad \text{pour } j = 0, \ldots, N-1$$

Cependant, le calcul direct de cette somme pour chaque j nécessite N opérations, et il y a N valeurs de j à calculer, ce qui donne une complexité totale en $\mathcal{O}(N^2)$. Ce coût devient rapidement prohibitif : pour seulement 10 000 points, il faut effectuer 100 millions d'opérations.

Une avancée majeure a été réalisée en 1965 par **James Cooley** et **John Tukey**, avec l'introduction de la **transformée de Fourier rapide**, ou **FFT (Fast Fourier Transform)**. Leur idée repose sur une astuce simple mais puissante : séparer la somme en deux parties, selon que les indices k sont pairs ou impairs.

$$g_j = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k} \, e^{-2\pi i \frac{j(2k)}{N}} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} \, e^{-2\pi i \frac{j(2k+1)}{N}}$$

On regroupe cette expression comme suit :

$$g_j = x_j + e^{-2\pi i \frac{j}{N}} \cdot y_j$$

où

$$x_j = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k} \, e^{-2\pi i \frac{jk}{N/2}}, \qquad y_j = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} \, e^{-2\pi i \frac{jk}{N/2}}$$

On a donc exprimé la DFT de taille N comme deux DFTs de taille $N/2$. Et ce processus peut être répété récursivement aussi longtemps que N est pair. Idéalement, on choisit $N = 2^M$, avec $M \in \mathbb{N}$, pour que la division soit toujours possible.

De plus, les relations suivantes permettent de reconstituer les N coefficients à partir des sous-transformées :

$$\begin{aligned} g_j &= x_j + w^j y_j \\ g_{j+N/2} &= x_j - w^j y_j \end{aligned} \quad \text{où} \quad w^j = e^{-2\pi i \frac{j}{N}}$$

À chaque niveau, les données sont regroupées par paires (en fonction de leur parité), puis les résultats sont combinés deux à deux. Pour gérer efficacement ces regroupements, on renumérote les indices en binaire, puis on inverse l'ordre des bits.

Par exemple, pour un signal de 16 points :

$$\text{indices binaires :} \quad 0000, 0001, 0010, 0011, \ldots, 1111$$

$$\text{inversés :} \quad 0000, 1000, 0100, 1100, \ldots, 1111$$

Cette réorganisation permet de réaliser les opérations dans le bon ordre, sans redondance. Grâce à cette approche récursive, le nombre total d'opérations est réduit à :

$$\mathcal{O}(N \log_2 N)$$

Ce gain est considérable : pour un signal de taille $N = 2^{20}$ (environ un million de points), on passe de 10^{12} opérations à environ 2×10^7, soit un facteur 50 000 de réduction.